Differenzieren 1

Ableiten

1. Leite zweimal ab: a) $f(x) = 3x^7 - 5x^4 + 2x - 1$
b) $g(x) = 2(ax + b)^2 + 2$; a,b konstant.

2. Leite zweimal ab (a, b, n : Konstanten):

a) $y = \frac{1}{3}x^7 - \frac{2}{3}x^6 + 2x^3 - 7$ b) $y = 5(a^2bx - ab)$

c) $f(u) = (au + 1)\cdot(bu + 1)$ d) $y = \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ e) $y = \frac{ax^{4n-a}}{b}$

3. Leite zweimal ab (a, n $\in$ **N**, konstant) :

a) $f(x) = -1.4x^5 + 3x^2 - 17x + 9$ b) $s = 2a(3t^2 - 15t + 2)$

c) $y = ax^{2n+a}$ d) $f(u) = (3 - 2u)^3$ e) $y = \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$

4. Leite ab: a) $y = 3x^4 - 2x^3 + 0,5x^2 - 5$ b) $y = (ax + b)^2$; a,b konstant

5.
Leite ab durch Grenzübergang: a) $y = \sqrt{2x - 1}$ b) $f(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$

6. Leite ab durch Grenzübergang: a) $f(x) = \frac{x}{x - 1}$ b) $g(u) = \sqrt{1 - u}$

7.
Leite ab durch Grenzübergang: $m(u) = \frac{3u}{1 - 2u}$

8.
Leite ab durch Grenzübergang: $f(x) = \frac{5x}{x - 1}$

9. Leite ab durch Grenzübergang: $f(x) = x/(x - 1)$

10. Leite ab durch Grenzübergang: a) $s(t) = \frac{2t}{3 - 4t}$ b) $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$

11. Leite zweimal ab (Resultate vereinfacht):

a) $f(x) = 2x^5 - 7x^3 + 2x$

b) $g(x) = a(x - b)^2$; a,b konstant

c) $e(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

Ableitungsfunktion

12. Zeichne den Graph von f(x)) = |x| und den der Ableitungsfunktion samt Kommentar.

13. Geg: $f(x) = \begin{cases} 3x - x^2 & \text{für } x \geqslant 0 \\ mx + q & \text{für } x < 0 \end{cases}$

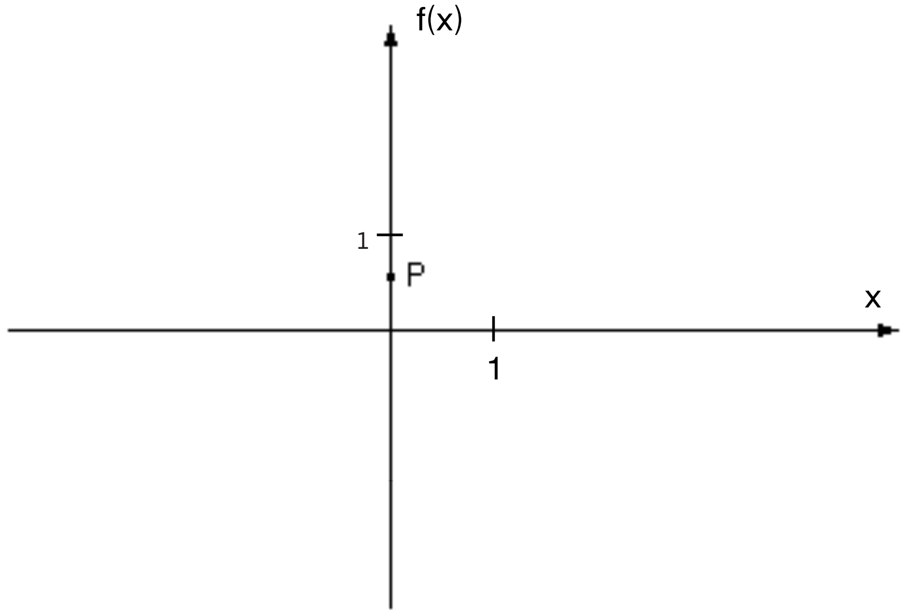
a) Bestimme m und q so, dass f an der Stelle $x_o = 0$ differenzierbar ist.

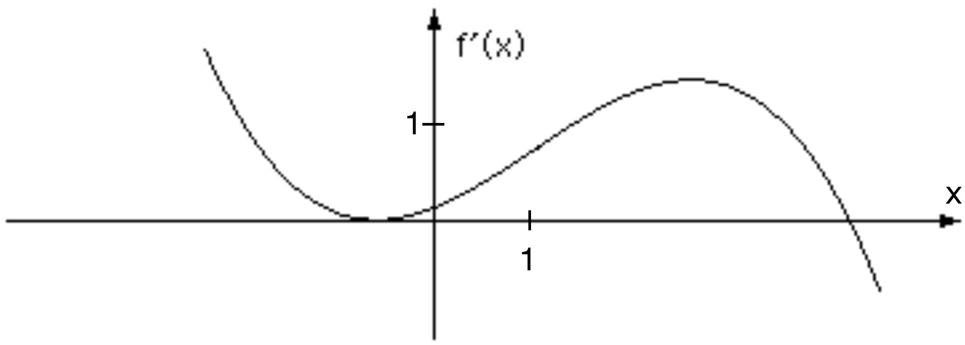
b) Wann heisst allgemein eine Funktion f "an der Stelle x_o differenzierbar"? (Sowohl anschauliche als auch exakte Definition angeben)

14. Geg: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leqslant 1 \\ mx + q & \text{für } x > 1 \end{cases}$

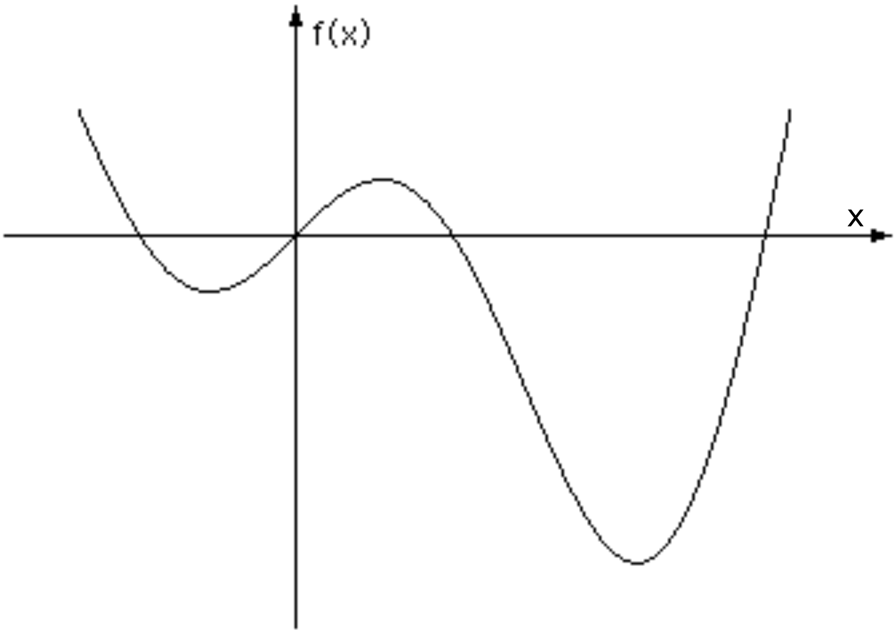
Bestimme m und q so, dass f an der Stelle x = 1 differenzierbar ist.

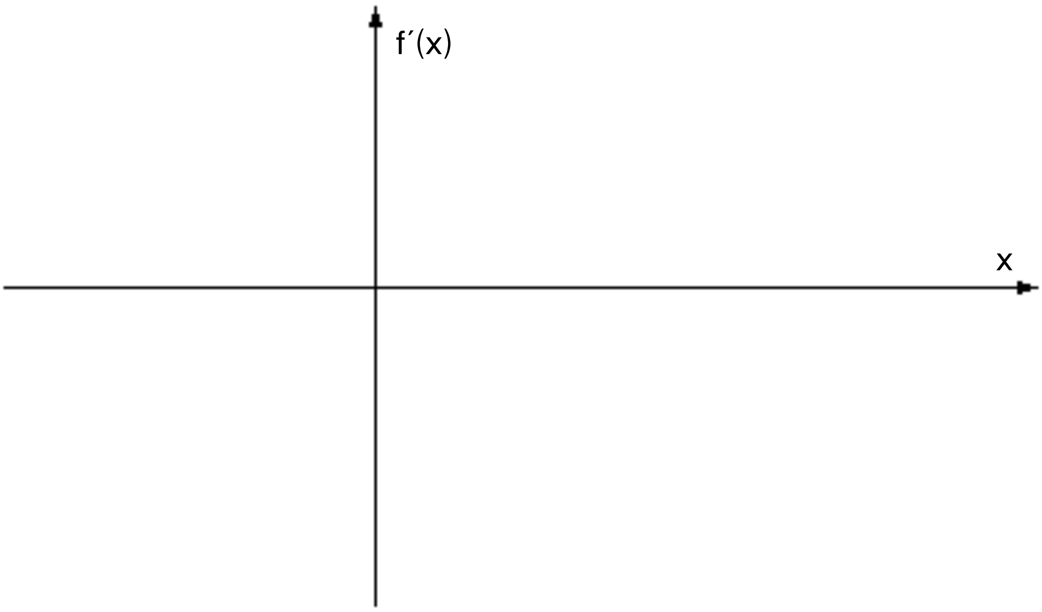
15. Geg: Graph von f´ und vom Graphen von f der Punkt P.
Ges: Ungefährer Verlauf des Graphen von f (direkt aufs Blatt zeichnen)





16. Skizziere auf <u>diesem</u> Blatt den ungefähren Verlauf des Graphen von $f'(x)$.





17. Gib die Definition der Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 !

18. Was bedeutet die Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 ?

19.
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}(x-4)(x+2) & \text{für } x \leq 0 \\ mx + q & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Bestimme m und q so, dass f an der Stelle x = 0 differenzierbar ist.

Tangenten, Normalen

20. Bestimme für $f(x) = x^3/6 + 4x^2 + ax + b$ die Koeffizienten a und b so, dass die Tangente an den Graph von f im Punkt P(4|..) die Steigung 2 hat.

21. Bestimme den Schnittwinkel der Graphen von $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^2 - 4x + 4$.

22. Geg: g: $y = -x$; p: $y = x^3/12$.
Ges: Parallelen zu g, die p rechtwinklig schneiden.

23. Geg: $f(x) = x^2$; $g(x) = x^2 + 4x + 4$.
Ges: Schnittpunkt S und Schnittwinkel α der beiden Graphen.

24. In welchen Punkten hat der Graph von $d(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 30$ eine horizontale Tangente?

25. Geg: g: $y = x$; p: $y = ax^2$.
Beweise folgende Behauptung:
Für alle $a \in \mathbb{R}$ schneiden sich g und p in dem vom Ursprung verschiedenen Schnittpunkt unter dem Winkel $\alpha = 18.43°$(auf 4 Stellen gerundet).

26. Geg: p: $y = \frac{1}{8}x^2$; P(4| 2) ; h: $y = 2x - 4$.

a) Bestimme die Gleichung der Tangente t in P an p.
b) Bestimme die Gleichung jener Parallelen g zu h, welche p rechtwinklig schneidet. Bestimme auch die beiden Schnittpunkte von g und p.
c) Gib eine sinnvolle Definition von "Abstand der Parabel p von der Geraden h" und berechne diesen Abstand.

27. Geg: Parabel p: $y = 0.25 \cdot x^2$, Punkt P(2|...) $\in$ p, Gerade g: $y = -2x$.
Ges: a) Gleichung der Tangente t in P an p
b) Gleichung der Normalen n zu p in P sowie Schnittwinkel von n und p im zweiten Schnittpunkt Q
c) Gleichung jener Parallelen f zu g, die Tangente an p ist

28. Für welchen Wert von a schneiden sich die Graphen von $f(x) = x^2 + ax$ und $g(x) = x^2 + a$ unter einem rechten Winkel? Bestimme auch den Schnittpunkt.

29. Bestimme für f(x) die Koeffizienten a und b so, dass die Tangente an den Graph von f im Punkt P(1|...) die Steigung -5/2 hat.

$f(x) = \frac{x^{17}}{13} + 19x^9 - a \cdot x^3 + b$

Diskussion

30.

a) Diskutiere: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}$

b) Bestimme die Gleichung der Tangente im Punkt P(0|f(0)) und den (die) Schnittpunkt(e) der Tangente mit dem Graphen von f.

31. ☞ a) Diskutiere h(x) und zeichne den Graphen für $-2 \leqslant x \leqslant 4.5$; **LE = 4H.**

$h(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^3$

b) Welche Fläche schliesst die Kurvennormale im Punkt P(2 | ...) mit den Koordinatenachsen im ersten Quadranten ein?

32. Diskutiere: $f(x) = 0.1(x^4 + 8x^3 + 16x^2)$.
Zeichne den Graphen für $x \in [-5.5; 1.5]$, LE = 2H.

33. Diskutiere: $f(x) = 0.1 \cdot (x^5 - 8x^4 + 16x^3)$.
Zeichne den Graphen im Bereich $-1 \leqslant x \leqslant 4.5$; LE = 2H.

34. Beweise: Der Graph der Funktion $f(x) = ax^5 - bx^3 + cx$ (a, b, c > 0) hat 3 Wendepunkte, welche auf einer Ursprungsgeraden liegen.

Extrema

35. Dem über der x-Achse liegenden Segment der Parabel $y = 4 - ax^2$ ist ein Rechteck mit maximaler Fläche so einzubeschreiben, dass eine Rechteckseite auf der x-Achse legt.

a) Wie lang sind die Rechteckseiten ?

b) Welche Besonderheit zeigt das Resultat ?

c) Für welchen Wert von a ist das maximale Rechteck ein Quadrat ?

36. Aus 20cm Draht soll ein Rechteck geformt werden. Dieses Rechteck wird um eine seiner Seiten rotiert. Der dabei entstehende Zylinder soll maximales Volumen haben. Wie sind die Rechteckseiten zu wählen ?

37. Welcher Punkt auf der Parabel p: $y = 0.25x^2$ hat von $P(0|3)$ minimalen Abstand und wie gross ist dieser ?

38. Auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius R liegt das Zentrum einer zweiten Kugel. Wie gross muss der Radius r dieser zweiten Kugel sein, damit der innerhalb der ersten Kugel liegende Teil ihrer Oberfläche maximal wird ?

39. Dem oberhalb der x-Achse liegenden Segment der Parabel p: $y = -x^2 + 9$ wird ein gleichschenkliges Dreieck mit Spitze im Ursprung und maximaler Fläche einbeschrieben. Bestimme Grundlinie und Fläche dieses Dreiecks.

40. Wie hoch ist der einer Kugel mit Radius R einbeschriebene Kegel mit maximaler Mantelfläche ?

41. Gegeben: $A(a|0)$, $B(0|b)$ mit $a > 0$, $b > 0$.
Bestimme die Koordinaten eines Punktes C auf der Strecke AB, für den die Fläche des Dreiecks OCF maximal ist. F ist der Fusspunkt des Lotes von C auf die x-Achse.

42. Ein gerader Kreiszylinder soll die Oberfläche 12 und maximales Volumen haben. Bestimme den Grundkreisradius und die Höhe.

43. Die Parabel p: $y = 2 - ax^2$ geht durch $P(2|0)$. Der Punkt Q liegt auf dem Parabelbogen zwischen dem Scheitel und P; F ist der Fusspunkt des Lotes von Q auf die x-Achse. Bestimme die Koordinaten von Q so, dass das Dreieck OQF maximale Fläche hat.

44. Dem von den Parabeln p_1: $y = 4 - x^2$ und p_2: $y = 0{,}25x^2 - 1$ berandeten Flächenstück soll ein Rechteck mit achsenparallelen Seiten und maximalem Inhalt einbeschrieben werden. Gib Länge und Breite dieses Rechtecks an.

45. Welche Punkte auf der Kurve $y = x^3 - 2x$ haben vom Ursprung extremale Entfernung? (nur die x-Koordinaten angeben)
Gib auch die Art der Extrema an!

46. Einem Kugelsegment mit Höhe $H = 1$ und Schnittkreisradius (nicht Kugelradius!) $\rho = 2$ ist der stehende Kreiszylinder maximalen Volumens einbeschrieben. Berechne dessen Höhe h und dessen Grundkreisradius r.

47. Die Graphen von $f(x) = x^3 - 8$ und $g(x) = 2 - x^2/2$ beranden zusammen mit der y-Achse im 1. und 4. Quadranten eine geschlossene Figur. Dieser Figur ist ein Rechteck mit achsenparallelen Seiten und maximalem Umfang einbeschrieben. Berechne die Länge der horizontalen Seite sowie die Fläche dieses Rechtecks.

48. Einem geraden Kreiskegel mit Grundkreisradius $R = 1$ und Höhe $H = 3$ ist ein zweiter Kreiskegel mit extremaler Mantelfläche M so einzubeschreiben, dass dessen Spitze im Mittelpunkt des Grundkreises des gegebenen Kegels liegt. Welcher Kegel hat maximale, welcher minimale Mantelfläche? Gib den Grundkreisradius r, die Höhe h und die Mantelfläche M der betreffenden Kegel an.
Begründe anschaulich (geometrisch) die Art der Extrema.

Gebrochen rationale Funktionen

49. Stelle die Gleichung der Parabel dritten Grades auf, die in P(0|2) die Steigung 4 und an den Stellen $x = 2$ und $x = -2$ horizontale Tangenten hat.

50. a) Wieviele Nullstellen, Extrema und Wendepunkte kann eine g.r.F. 7-ten Grades höchstens haben =?
b) Begründe die Antworten von a).

51. Bestimme die Gleichung einer g.r.F. möglichst niedrigen Grades mit den Nullstellen $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$ und einer doppelten Nullstelle bei $x_3 = +1$. Der Funktionsterm soll keine Klammern enthalten.

52. Eine bezüglich des Ursprungs O symmetrische Parabel 5. Grades hat in O die Steigung 4 und in P(2|0) ein Extremum.
a) Gib die Gleichung der Parabel an.
b) Skizziere die Parabel (nur qualitativ, keine Kurvendiskussion)

53. a) Beweise: Eine Parabel 3.Ordnung hat immer einen Wendepunkt.
b) Was kann über die Koeffizienten der Gleichung $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ gesagt werden, wenn die zugehörige Parabel ihren Wendepunkt im Ursprung hat ?
c) Beweise: Die Wendetangente der Parabel p: $y = ax^3 + cx$ hat mit dieser nur den Wendepunkt gemeinsam.

54. Bestimme die Gleichung einer g.r.F. möglichst niedrigen Grades mit den Nullstellen ± 2 und $1 \pm \sqrt{3}$. Der Funktionsterm soll keine Klammern aufweisen.

55. Gegeben ist die Parabel p: $y = 0.125 \cdot x^4 - x$. Eine weitere Parabel p* von 3.Ordnung hat mit p zwei Nullstellen x_1 und x_2 gemeinsam, wobei $x_1 > 0$. Ausserdem hat p* an der Stelle x_1 einen Wendepunkt und und schneidet p an der Stelle x_2 rechtwinklig. Wie lautet die Gleichung von p* ?

56. Eine Parabel 4.Ordnung hat im Ursprung ein Extremum und in P(2|4) einen Wendepunkt, dessen Tangente durch den Ursprung geht. Wie lautet die Gleichung der Parabel ?

57. Bestimme die Gleichung der Parabel 3. Grades, die in P(2|5) eine horizontale Tangente und in Q(1|3) den Wendepunkt hat.

58. Bestimme die Gleichung der zur y-Achse symmetrischen Parabel 4. Grades, die bei $x = 2$ ein Extremum hat und bei $x = \sqrt{3}$ die x-Achse in einem Winkel von 30° schneidet.

59. Welcher Bedingung müssen die Koeffizienten von

$$p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

genügen, damit der zugehörige Graph keinen Wendepunkt hat ?

Nullstellen

60. a) Die Gleichung $x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 3x - 36 = 0$ hat die Lösungen $x_1 = -1$ und $x_2 = 4$. Bestimme die übrigen Lösungen.
b) Die Gleichung $2x^3 + 14x^2 - 3x - 21 = 0$ hat mindestens eine ganzzahlige Lösung. Bestimme alle Lösungen.

61. Löse: $x^3 - 11x^2 - 15x + 36 = 0$. Tip: es gibt eine ganzzahlige Lösung.

62. Löse: $x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 24x - 28 = 0$. Tip: Es gibt zwei ganzzahlige Lösungen.

63. Die Gleichung $x^4 - x^3 - 38x^2 - 33x + 35 = 0$ hat mindestens 2 ganzzahlige Lösungen. Löse Die Gleichung.

64. Die Gleichung $x^5 + 2x^4 - 11x^3 - 22x^2 + 30x + 60 = 0$ hat die Lösung $x_1 = -2$. Löse die Gleichung.

65. Bestimme die Vielfachheiten aller Nullstellen für folgende Funktion:
$f(x) = (x^7 - 16x^3)(x^2 - x - 6)$

66. Es ist $f(x) = x^5 - x^4 - 23x^3 - 42x^2 - 4x + 24$.
Löse die Gleichung $f(x) = 0$ wenn folgendes bekannt ist: $x_1 = -2$ ist eine doppelte Nullstelle von f und eine weitere Nullstelle ist ganzzahlig.

67. Bestimme die Gleichung einer g.r.F. möglichst niedrigen Grades mit den Nullstellen $1 \pm \sqrt{3}$und der dreifachen Nullstelle 1. Der Funktionsterm soll keine Klammern enthalten.

Differenzieren 1: Lösungen

1. a) $f'(x) = 21x^6 - 20x^3 + 2$; **$f''(x) = 126x^5 - 60x^2$**
b) $g(x) = 2a^2x^2 + 4abx + 2b^2 + 2$; $g'(x) = 4a^2x + 4ab$; **$g''(x) = 4a^2$**

2. a) $y' = 7x^6/3 - 4x^5 + 6x^2$; **$y'' = 14x^5 - 20x^4 + 12x$**
b) $y' = 5(a^2b)$; **$y'' = 0$**
c) $f(u) = abu^2 + au + bu + 1$; $f'(u) = 2abu + a + b$; **$f''(u) = 2ab$**
d) $y' = x^{2n-1}/(2n-1)!$; **$y'' = x^{2n-2}/(2n-2)!$**
e) $y' = a(4n-a)x^{4n-a-1}/b$; **$y'' = a(4n-a)(4n-a-1)x^{4n-a-2}/b$**

3. a) $f'(x) = -7x^4 + 6x - 17$; **$f''(x) = -28x^3 + 6$**
b) $s' = 2a(6t - 15)$; **$s'' = 12a$**
c) $y' = a(2n+a)x^{2n+a-1}$; **$y'' = a(2n+a)(2n+a-1)x^{2n+a-2}$**
d) $f(u) = 27 - 54u + 36u^2 - 8u^3$; $f'(u) = -54 + 72u - 24u^2$;
$f''(u) = 72 - 48u$
e) $y' = x^{2n-3}/(2n-3)!$; **$y'' = x^{2n-4}/(2n-4)!$**

4. a) **$y' = 12x^3 - 6x^2 + x$** b) **$y' = 2a^2x + 2ab$**

5. a) $(\sqrt{h} - \sqrt{})(\sqrt{h} + \sqrt{})/(h(\sqrt{h} + \sqrt{}) = (2x + 2h - 1 - 2x + 1)/...$
--> **$y' = 1/\sqrt{(2x - 1)}$**
b) $((t+h)(t^2+1) - t((t+h)^2+1))/h((t+h)^2+1)(t^2+1)$
$= (t^3 + t + t^2h + h - (t^3 + 2t^2h + th^2 + t))/N$ --> **$f'(x) = (-t^2 + 1)/(t^2 + 1)^2$**

6. a) $((x+h)(x-1) - x(x+h-1))/h(x+h-1)(x-1) = (x^2 - x + hx - h - x^2 - hx + x)/N$
$= -h/N$ --> **$f'(x) = -1/(x - 1)^2$**
b) $(\sqrt{(1-u-h)} - \sqrt{(1-u)})/h = (1-u-h-1+u)/h\sqrt{(1-u-h)}\sqrt{(1-u)}$
--> **$g'(u) = -1/2\sqrt{(1 - u)}$**

7. $(3(u+h)(1-2u) - 3u(1-2(u+h)))/h(1-2(u+h))(1-2u)$
$= (3u - 6u^2 + 3h - 6uh - 3u + 6u^2 + 6uh)/N = 3h/N$ --> **$m'(u) = 3/(1-2u)^2$**

8. $(5(x+h)(x-1) - 5x(x+h-1))/h(x+h-1)(x-1)$
$= (5x^2 - 5x + 5hx - 5h - 5x^2 - 5hx + 5x)/N$
$= -5h/N$ --> **$f'(x) = -5(x - 1)^2$**

9. $a((x+h)(x-1) - x(x+h-1))/h(x+h-1)(x-1) = (x^2 - x + hx - h - x^2 - hx + x)/N$
$= -h/N$ --> **$f'(x) = -1/(x - 1)^2$**

10. a) m_s ={ 2(t+h)/(3-4t-4h) - 2t/(3-4t)}/h
= {2(t+h)·(3-4t)-2t(3-4t-4h)}/{h·(3-4t-4h)(3-4t)}
= {6t-8t^2+6h-8th-6t+8t^2+8th}/{h·(3-4t-4h)(3-4t)}
= {6h}/{h·(3-4t-4h)(3-4t)} => s´(t) = lim m_s = **6/(3-4t)^2**
b) m_s = (√h-√)(√h + √)/{h·√h + √) = {(1 - 2(x+h) - (1-2x)}/{h·√h + √)
= -2h/{h·√h + √) => f´(x) = lim m_s = **-1/$\sqrt{1 - 2x}$**

11. a) f´(x) = 10x^4 - 21x^2 + 2 ; **f´´(x) = 40x^3 - 42x**
b) g(x) = ax^2 - 2abx + ab^2 ; g´(x) = 2ax - 2ab ; **g´´(x) = 2a**
c) e´(x) = **e´´(x) = e(x)**

12. f ist in **R**\{0} diff´bar; lim m_S von links gegen 0 = -1, von rechts = 1

13. a) p(x) = 3x - x^2; g(x) = mx + q;
1. p(0) = g(0) ==> **q = 0**
2. p´(0) = 3 - 2·0 = g´(0) = m ==> **m = 3**
(lim m_S von links und von rechts gegen 0 gleich)
b) wenn bei x_0 eine Tangente gezeichnet werden kann
wen lim m_S für h gegen x_0 existiert

14. p(x) = x^2; g(x) = mx + q;
1. p(1) = g(1) ==> 1 = m + q ; 2. p´(1) = g´(1) ==> 2 = m ==> **m = 2 ; q = -1**

15. ----

16. ----

17. lim für x --> x_0 von (f(x) - f(x_0))/(x -x_0)

18. Steigung der Tangente an den Graph von f an der Stelle x_0

19. p(x) = -1/3 · (x^2 - 2x - 8) ; g(x) = mx + q; p´(x) = -2x/3 + 2/3, g´(x) = m
p(0) = g(0) ==> **q = 8/3** ; p´(0) = g´(0) ==> **2/3 = m**

20. f´(x) = 0,5x^2 + 8x + a; f´(4) = 8 + 32 + a = 2 ==> **a = -38; b bel.**

21. f(x) = g(x) => x^2 = x^2 - 4x + 4;
=> x = 1; S(1|1) ; f´(1) = 2 = m_1; g´(1) = -2 = m_2
tan φ = |(2 - (-2))/(1 + 2·(-2))| = 4/3 ==> **φ = 53,1°**

22. $m_g = -1$; ==> $m_t = 1 = y' = 0.25x^2$ ==> $x_{12} = \pm 2$ ==> $P_1(-2|-2/3)$; $P_2(2|2/3)$

==> g_{12}: $-1 = (y +- 2/3)/(x +- 2)$ ==> $\mathbf{y = -x -+ 8/3}$

23. $f(x) = g(x)$ ==> $4x + 4 = 0$ ==> $x = -1$ ==> $S(-1|1)$; $f'(-1) = -2 = m_1$; $g'(-1) = 2 = m_2$;

==> $\tan\varphi = |(2 - (-2))/(1 + 2\cdot(-2))| = 4/3$ ==> $\boldsymbol{\varphi = 53{,}13°}$

24. $d'(x) = 6x^2 + 6x - 36 = 0$ ==> $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2) = 0$

==> $\mathbf{x_1 = -3}$ **;** $\mathbf{x_2 = 2}$ **==>** $\mathbf{P_1(-3|111)}$ **,** $\mathbf{P_2(2|-14)}$

25. $g \cap p$: $x = ax^2$ ==> $x_1 = 0$, $x_2 = 1/a$; $S_1(0|0)$, $S_2(1/a|1/a)$

$m_p = 2a\cdot 1/a = 2$; $m_g = 1$; $\tan\varphi = |(2 - 1)/(1 + 2\cdot 1)| = 1/3$; ==> $\boldsymbol{\varphi = 18{,}4°}$

26. a) p: $y' = x/4$ ==> $m_t = 1$; t: $1 = (y - 2)/(x - 4)$ ==> **t:** $\mathbf{y = x - 2}$

b) $m_{t'} = -0{,}5 = x/4$ ==> $x = -2$ ==> $\mathbf{P'(-2|0{,}5)}$

==> $m_g = 2 = (y - 0{,}5)/(x + 2)$ ==> **g:** $\mathbf{y = 2x + 9/2}$

$p \cap g$: $x^2 - 16x - 36 = (x + 2)(x - 18) = 0$ ==> $\mathbf{P', P''(18|40{,}5)}$

c) Abstand der Geraden h von jener Parallelen zu h, die Tangente an p ist die Länge der kürzesten Verbindungsstrecke von p zu h

Tangente $h' \parallel h$: $x/4 = 2$ ==> $x = 8$ ==> Normale in $P(8|8)$: mn = $-0{,}5$

n: $m_n = -0{,}5 = (y - 8)/(x - 8)$ ==> $y = -0{,}5x + 12$

$n \cap h$: $-0{,}5x + 12 = 2x - 4$ ==> $5/2x = 16$; ==> $x = 32/5$

==> $Q(32/5|44/5) = Q(6{,}4|8{,}8)$ **==>** $\mathbf{\overline{PQ} = 1{,}789}$

27. a) $m_t = y'(2) = 1$ ==> $1 = (y - 1)/(x - 2)$ ==> **t:** $\mathbf{y = x - 1}$

b) $m_n = -1$ ==> $-1 = (y - 1)/(x - 2)$ ==> **n:** $\mathbf{y = -x + 3}$

$p \cap n$: $x^2/4 = -x + 3$ ==> $x^2 + 4x - 12 = (x - 2)(x + 6) = 0$ ==> $Q(-6|9)$;

$y'(-6) = -3 = m_{t'}$; ==> $\tan\varphi = |(-3 + 1)/(1 + (-3)(-1))| = 1/2$ ==> $\boldsymbol{\varphi = 26{,}6°}$

c) $m_g = m_f = -2 = y'$ ==> $x = -4$ ==> $B(-4|4)$

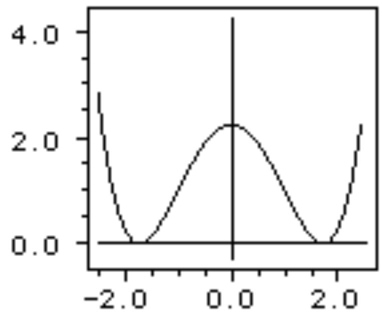
==> f: $-2 = (y - 4)/(x + 4)$ ==> **f:** $\mathbf{y = -2x - 4}$

28. SP: $x^2 + ax = x^2 + a$ => $x = 1$

$m_f\cdot m_g = -1 = (2x + a)2x = (2 + a)\cdot 2$ => $\mathbf{a = -5/2}$**, SP(1 | -3/2)**

29. $f'(x) = 17x^{16}/13 + 171x^8 - 3ax^2$, $f'(1) = 2240/13 - 3a$ ==> $\mathbf{a = -1515 / 26}$**; b bel.**

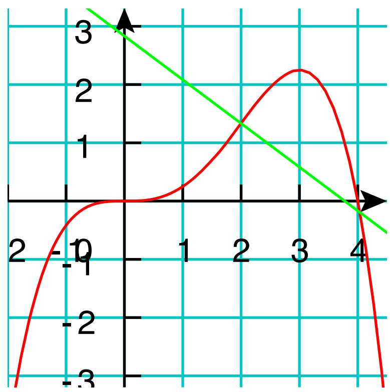
30. a)



1. **Symmetrie bez. y-Achse**
2. Nullst: $z^2 - 6z + 9 = (z - 3)^2 = 0$
   ==> $\mathbf{x_{12} = \pm\sqrt{3}}$
3. $f'(x) = x^3 - 3x$; $f''(x) = 3x^2 - 3$; $f'''(x) = 6x$
   $f'(x) = 0$ ==> $x_3 = 0$, $x_{12} = \pm\sqrt{3}$
   $f''(x_3)$ -2; $f''(x_{12}) = \pm 6$ => **H(0|9/4); $\mathbf{T_{12}(\pm\sqrt{3} \mid 0)}$**
4. $f''(x) = 0$ ==> $x_{45} = \pm 1$; $f'''(\pm 1) \neq 0$ ==> **$\mathbf{W_{12}(\pm 1|1)}$**
5. **f(x) --> ∞ für x --> ±∞** (±1|1), (±$\sqrt{2}$|1/4), (±2|1/4)

b) **t: y = 9/4**
   $t \cap p$: $x^4 - 6x^2 = 0$ ==> $x_{67} = \pm\sqrt{6}$ => **$\mathbf{S_{12}(\pm\sqrt{6} \mid 9/4)}$**

31.



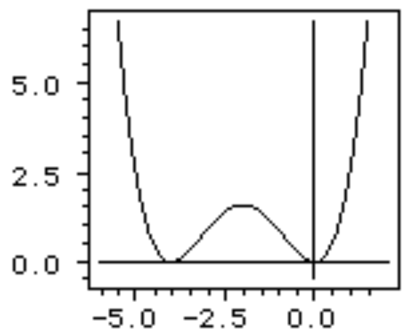
$h'(x) = -x^3/3 + x^2$; $h''(x) = -x^2 + 2x$; $h'''(x) = -2x+2$

1. Nullstellen: $x^4 - 4x^3 = x^3(x - 4) = 0$
   ==> **$\mathbf{x_1 = 0}$; $\mathbf{x_2 = 4}$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, k. Symm. ers.**
2. $h'(x) = 0$ ==> $x^2(1 - 3) = 0$ ==> $x_1 = 0$; $x_3 = 3$
   $h''(x_1) = 0$; $h''(x_3) < 0$ ==> **H(3|9/4)**
3. $h''(x) = 0$ ==> $x_1 = -6$; $x_4 = 2$
   $h'''(0) = 2$, $h''(2)$ 0 -2 ==> **Tr(0|0), W(2|4/3)**
4. h(x) --> -∞ für x --> ±∞ $P_1(-2|4)$, $P_2(-1|-5/12)$

b) P(2|4/3) h´(2) = 4/3 => $m_n = -3/4 = (y - 4/3)/(x - 2)$ => **n: y = -3/4·x + 17/6**

x = 0 => Q(0 | 17/6), y = 0 => R(34/9 | 0) => F = 0.5 · 17/6 · 34/9 = **289/54 = 5.352**

32. $f'(x) = 0{,}1(4x^3 + 24x^2 + 32x)$; $f''(x) = 0{,}1(12x^2 + 48x + 32)$



1. **keine Symm. ers.**
2. Nullst.: $x^2(x^2 + 8x + 16) = x^2(x + 4)^2 = 0$
   ==> **$\mathbf{x_1 = 0}$; $\mathbf{x_2 = -4}$**
3. Extr.: $x(x^2 + 6x + 8) = x(x + 2)(x + 4) = 0$
   ==> x_1; x_2; $x_3 = -2$, $f''(x_{12}) = 3{,}2$; $f''(x_3) = -1{,}6$
   ==> **$\mathbf{T_1(-4|0)}$; $\mathbf{T_2(0|0)}$; H(-2|1,6)**
4. WP: $3x^2 + 12x + 8 = 0$ ==> $x_{45} = -2 \pm 2\sqrt{3}/3$
   $f'''(x_{45}) = \pm 2{,}77$ ==> **$\mathbf{WP_1(-0{,}845|0{,}711)}$; $\mathbf{WP_2(-3{,}15|0{,}711)}$**
5. **f(x) --> ∞ für x --> ±∞**

33. $f'(x) = 0{,}1(5x^4 - 32x^3 + 48x^2)$

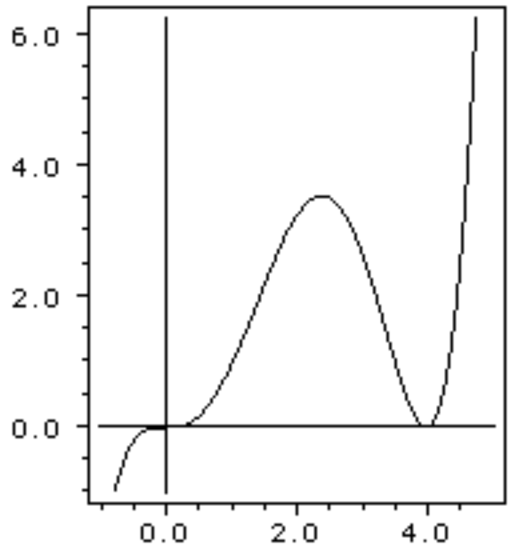
$f''(x) = 0{,}1(20x^3 - 96x^2 + 96x)$

$f'''(x) = 0{,}1(60x^2 - 192x + 96)$

1. Symm. **keine ersichtlich**

2. Nullst. $x^3(x - 4)^2 = 0$ ==> $\mathbf{x_1 = 0, x_2 = 4}$

3. Extrema $x^2(5x^2 - 32x + 48)$
$= x^2(x - 4)(5x - 12)$, f´ wechselt bei x_1
das Zeichen nicht ==> **kein Extr.**
f´ wechselt bei x_2 von - auf +
od $f''(4)=12.8 >0$ ==> **T(4|0)**
f´ wechselt bei $x_3 = 2{,}4$ von + auf -
od. $f''(2.4) = -4.66 < 0$ ==> **H(2,4|3,539)**



4. Wendep. $4x(5x^2- 24x + 24) = 0$
==> $x_{45} = 2{,}4 \pm 0{,}4\sqrt{6}$
f´´ wechselt bei x_1 das Zeichen (od. $f'''(0) = 9.6 \neq 0$ ==> **TRP(0|0)**
$f'''(x_{45}) = 12.2/-5.6 \neq 0$ ==> **$\mathbf{WP_1}$(3,380|1,485); $\mathbf{WP_2}$(1,420|1,906)**

5. **f(x) --> ± ∞ für x --> ± ∞**

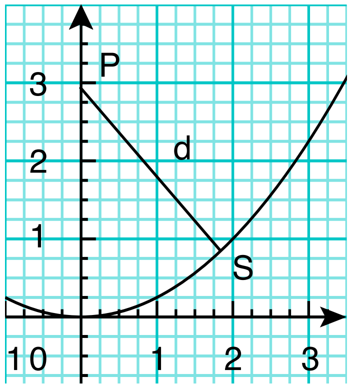
6. **P(-1|-2.5), P(1|0.9), P(4.5|2.28)**

34. $f'(x) = 5ax^4 - 3bx^2 + c$, $f''(x) = 20ax^3 - 6bx = 2x(10x^2 - 3b) = 0$
> $x_1 = 0$, $x_{23} = \pm\sqrt{3b/10a}$, Zeichenwechsel von f´´ bei x_{123}
(oder $f'''(x) = 60ax^2 - 6b$, $f'''(0) = 6b \neq 0$, $f'''(x_{23}) = 12b \neq 0$) => 3 WP, $WP_1(0|0)$
f ist ungerade => WP´s liegen symm bez. O , d.h. auf Ursprungsgerade.

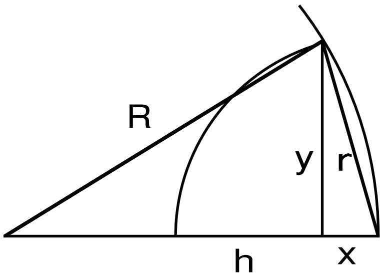
35. $F(x) = 2x\cdot(4 - ax^2) = -2ax^3 + 8x$, $\mathbf{D_F} = [0; 2/\sqrt{a}[$; $F'(x) = -6ax^2 + 8$; $F''(x) = -12ax$
$F'(x) = 0$ ==> $x_{12} = \pm 2/\sqrt{3a}$; $F''(x_1) < 0$ ==> Max
a) Seiten: **$\mathbf{4/\sqrt{3a}}$; 8/3**
b) **zweite Seite unabhängig von a** c) $4/\sqrt{3a} = 8/3$ ==> **a = 3/4**

36. $r = x$; $h = 10 - x$; $V = \pi r^2 h = \pi x^2(10 - x) = -\pi x^3 + 10\pi x^2$; $\mathbf{D} = [0; 10]$;
$V'(x) = -3\pi x^2 + 20\pi x = 0$ ==> $x_1 = 0$; $x_2 = 20/3$; $V''(x) = -6\pi x + 20\pi$;
$V''(x_2) < 0$ ==> Max. bei x_2 ==> **(r|h) = (20/3|10/3)**

37. $f(x) = d^2 = (x - 0)^2 + (x^2/4 - 3)^2 = x^4/16 - x^2/2 + 9$; $f'(x)$
$= x^3/4 - x = x(x^2/4 - 1) = 0$
$\Rightarrow x_1 = 0$; $x_{23} = \pm 2$
Geometrie ==> Max Bei $x_1 = 0$; Min bei $x_{23} = \pm 2$;
==> **$S_{12}(\pm 2|1)$; $d = 2\sqrt{2} = 2.82$**
oder: Normale von P auf Graph
=> $0.5x \cdot (y-3)/x = -1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow x = \pm 2$......

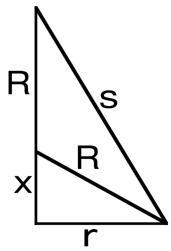


38. $M = 2\pi rh$
$y^2 = r^2 - x^2$ ==> $r^2 - x^2 = R^2 - R^2 + 2Rx - x^2$
$= R^2 - (R - x)^2$ $\quad r^2 = 2Rx$; $x = r^2/2R$
$h = r - x = r - r^2/2R$
$M(r) = 2\pi r(r - r^2/2R) = 2\pi(r^2 - r^3/2R)$
$M'(r) = 2\pi(2r - 3r^2/2R) = 0 \Rightarrow r_1 = 0$; $r_2 = 4R/3$
$M''(r) = 2\pi(2 - 3r/R)$; $M''(r_2) = 2\pi(2 - 4) < 0$
==> **Maximum für $r = 4R/3$**

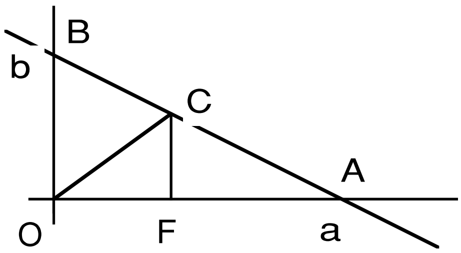


39. $F(x) = 0{,}5 \cdot g \cdot h = 0{,}5 \cdot 2x \cdot f(x) = -x^3 + 9x$; $x \in [0; 3]$;
$F'(x) = -3x^2 + 9$; $F''(x) = -6x$
$F'(x) = 0 \Rightarrow x_{12} = \pm\sqrt{3}$; $F''(X_1) < 0 \Rightarrow$ Max bei $x = \sqrt{3}$
==> **$g = 2 \cdot \sqrt{3}$; $F_{Max} = 6 \cdot \sqrt{3}$**

40. $M = \pi rs$
$r = \sqrt{R^2 - x^2}$, $s = \sqrt{(R + x)^2 + R^2 - x^2} = \sqrt{2R^2 + 2Rx}$
$\Rightarrow M(x) = \pi\sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{2R^2 + 2Rx}$
$\Rightarrow \overline{M}`(x) = -2R\,x^3 - 2R^2x^2 + 2R^3x + 2R^4$;
$\overline{M}'(x) = -6Rx^2 - 4R^2x + 2R^3 = 0$
$\Rightarrow 3x^2 + 2Rx - R^2 = 0 \Rightarrow x_{12} = (-R \pm 2R)/3 \Rightarrow x = R/3$
$\Rightarrow h = R + x =$ **$4R/3$**



41. g: $y = -b/a \cdot x + b$; $F(x|0)$; $C(x|-b/a \cdot x + b)$
Fläche: $f(x) = 0{,}5 \cdot x \cdot (-b/x \cdot x + b)$
$= -b/2a \cdot x^2 + bx/2$; $I = [0; a]$
$f'(x) = -b/a \cdot x + b/2 = 0 \Rightarrow x = a/2 \Rightarrow y = b/2$
$f(0) = f(a) = 0$; f in I pos. ==> Max.
==> **$C(a/2 \mid b/2)$**



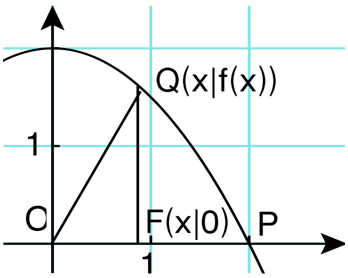
42. H: $V = \pi r^2 h$; N: $O = 2\cdot\pi r^2 + 2\pi r h = 12$ ==> $h = (6 - \pi r^2)/\pi r$

==> H: $V(r) = \pi r^2(6 - \pi r^2)/\pi r = 6r - \pi r^3$; $V(r) = 0$ => $r_1 = 0$, $r_2 = \sqrt{6/\pi}$;

ges.: Max von $V(r)$ in $[0 ; \sqrt{6/\pi}\,]$ $V'(r) = 6 - 3\pi r^2 = 0$ ==> $\mathbf{r = \sqrt{2/\pi} = 0.7979}$

$V''(r) = -6\pi r$; $V(\sqrt{6/\pi}) < 0$ ==> V maximal; $\mathbf{h = 2\sqrt{2/\pi} = 1.596}$

43.



$P \in p : 0 = 2 - a\cdot 4$ ==> $a = 1/2$;

Nullstellen von p: $f(x) = y = 2 - x^2/2 = 0$ ==> $x_{12} = \pm 2$.

Wähle x => $Q(x \mid f(x))$ und $F(x|0)$;

Fläche: $A(x) = 0.5 \cdot x \cdot f(x) = 0.5\cdot x\cdot(2 - x^2/2) = x - x^3/4$;

$A'(x) = 1 - 3x^2/4 = 0$ => $x = \pm\sqrt{4/3}$,

$A''(x) = -3x/2$; $A''(\sqrt{4/3}) < 0$ ==> Max bei $x = 2/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}/3$

==> $\mathbf{Q(2\sqrt{3}/3 \mid 4/3)}$

44. $F(x) = 2x\cdot(4 - x^2 - (x^2/4 - 1)) = -5x^3/2 + 10x$;

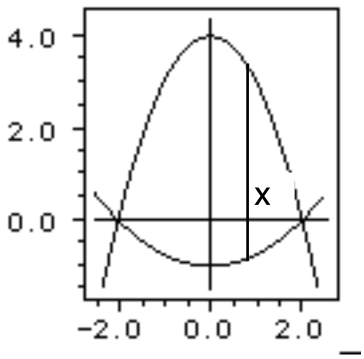
$x \in I = [0; 2]$

$F'(x) = -15x^2/2 + 10 = 0$ ==> $x = 2/\sqrt{3} = 1{,}155$

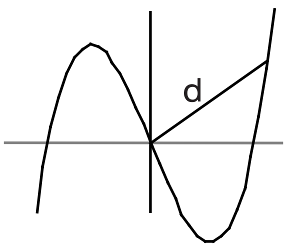
$F(0) = F(2) = 0$, $F(x) > 0$ in I ==> Max

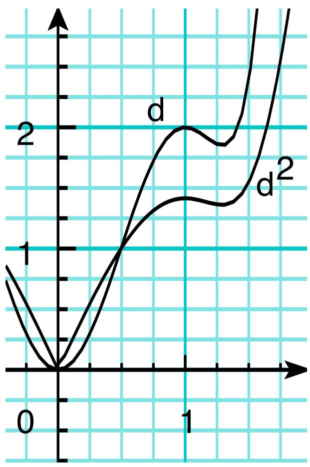
==> $\mathbf{l = 4/\sqrt{3} = 2{,}31}$;

$\mathbf{b} = 4 - 4/3 - (1/3 - 1) = 5 - 5/3 = \mathbf{10/3}$



45.





$d^2 = x^2 + (x^3 - 2x)^2$

$= x^6 - 4x^4 + 5x^2$;

$d^{2\prime} = 6x^5 - 16x^3 + 10x$

$= 2x(3x^4 - 8x^2 + 5) = 0$

==> $x^2_{12} = (8 \pm 2)/6$

==> $x_1 = \pm 1$, $x_2 = \pm\sqrt{5/3}$

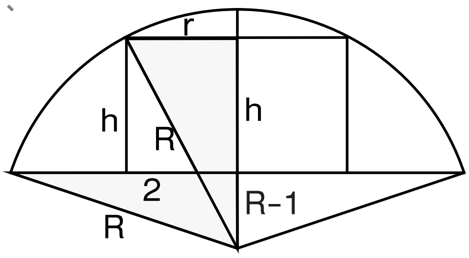
in $[0;\infty]$ ist d pos. und wächst von 0 auf ∞

==> **abs. Min bei P(0|0) ;**

rel. Max für $P_{12}(+-1 \mid \sqrt{2})$;

rel. Min bei $P_{34}(+-\sqrt{5/3} \mid 1.360$

46.



$R^2 = 4 + R^2 - 2R + 1 \implies R = 5/2$

$25/4 = r^2 + (R - 1 + h)^2 =$

$r^2 + 9/4 + 3h + h^2 \implies r^2 = 4 - 3h - h^2$

$V(h) = 4h - 3h^2 - h^3$,

$V'(h) = 4 - 6h - 3h^2 = 0$

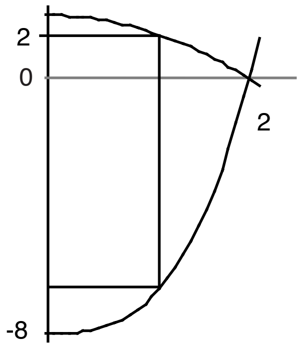
$\implies h = (\sqrt{21} - 3)/3 = 0.526$; $V(h)$

stetig u pos. in $[0;1]$, $V(0) = V(1) = 0$

$\implies$ Max bei **$h = 0.562$**

$r^2 = (11 - \sqrt{21})/3 \implies$ **$r = 1.46$**

47.



$U(x) = 2x + 2((2 - x^2/2) - (x^3 - 8))$

$\quad = 2x + 20 - x^2 - 2x^3$;

$D = [0; 2]$

$U'(x) = 2 - 2x - 6x^2 = 0$

$\implies x_1 = (-1 + \sqrt{13})/6 = 0.434$

$U''(x_1) = -12x_1 - 2 < 0$

$\implies$ **Max bei $x_1 = 0.434$**

$F = x(10 - x^2/2 - x^3) =$ **4.266**

48. H: $M = \pi x s$

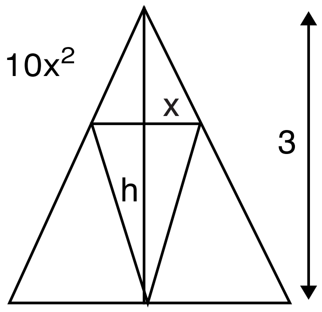
N: $3 : 1 = (3-h) : x \Rightarrow h = 3 - 3x$ (*) $\Rightarrow s^2 = h^2 + x^2 = 9 - 18x + 10x^2$

H: $M(x) = \pi x\sqrt{(9 - 18x + 10x^2)}$ ges: Extr. von M in [0 ; 1]

$\overline{M}(x) = x^2(9 - 18x + 10x^2) = 9x^2 - 18x^3 + 10x^4$

$\overline{M}'(x) = 18x - 54x^2 + 40x^3 = 0 \Rightarrow 2x(9 - 27x + 20x^2) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0,\ x_{23} = (27 \pm 3)/40\ ;\ x_2 = 3/4;\ x_3 = 3/5$



$\Rightarrow$ $\mathbf{x_1 = 0;\ h_1 = 3,\ s_1 = 3,\ M_1 = 0}$ abs. Randminimum

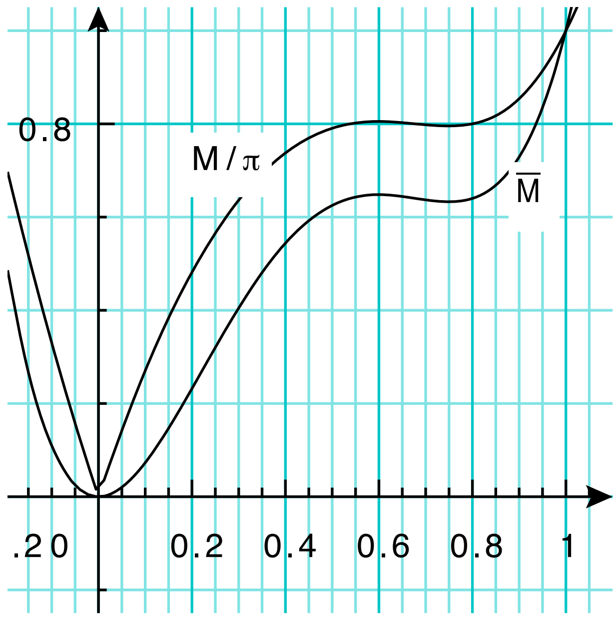
x_2 $\mathbf{= 3/4;\ h_2 = 3/4,\ s_2 = 3\sqrt{2}/4,\ M_2 = 9\pi\sqrt{2}/16 = 2.499}$ rel Minimum[1]

$\mathbf{x_3 = 3/5;\ h_3 = 6/5;\ s_3 = 3\sqrt{5}/5\ ;\ M_3 = 9\pi\sqrt{5}/25 = 2.529}$ rel. Maximum

ausserdem: $\mathbf{x_4 = 1;\ h_4 = 0;\ s_4 = 1;\ M_4 = \pi = 3.14}$ abs. Randmaximum

(*) hier besser nach h auflösen
(Brüche vermeiden)

Hier noch ein Vergleich der Funktionen M(x) (eigentlich $M(x)/\pi$) und $\overline{M}(x) = [M(X)/\pi]^2$



49. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d;\ y' = 3ax^2 + 2bx + c;\ P \in p \Longrightarrow d = 2;$

$m_t = 4 = y'(0) \Longrightarrow c = 4$

$y'(2) = 0 = 12a + 4b + 4$ +

$y'(-2) = 0 = 12a - 4b + 4$ – $\Longrightarrow 24a + 8 = 0 \Longrightarrow a = -1/3 \Longrightarrow b = 0$

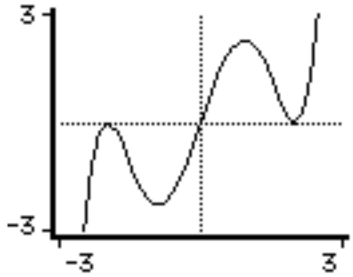
$\Longrightarrow$ $\mathbf{y = -x^3/3 + 4x + 2}$

50. a) 7 Nullstellen, 6 Extrema, 5 Wendepunkte

b) y, y´, y" = 0 (notw. Bed) sind Gleichungen 7-ten (6-,5-ten) Grades mit max. 7 (6, 5) Lösungen

51. $f(x) = (x - (1+\sqrt{2}))(x - (1-\sqrt{2}))(x - 1)^2 = \mathbf{x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1}$

52. Symm. ==> p: $y = ax^5 + bx^3 + cx$; $y' = 5ax^4 + 3bx^2 + c$



$P \in p$:	$0 = 32a + 8b + 2c$
$y'(0) = 0$:	$0 = 80a + 12b + c$
$y'(0) = 4$:	$4 = \qquad\qquad c$

==> $a = 1/4$; $b = -2$ $c = 4$ ==> $\mathbf{y = x^5/4 - 2x^3 + 4x}$

53. a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; Parabel 3-ter Ordnung ==> $a \neq 0$;

$f''(x) = 6ax + 2b$; $f'''(x) = 6a$; WP in x_0 <==> $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$

$f''(x) = 0$ ==> $x = -b/3a = x_0$ ex. immer, denn $a \neq 0$

$f'''(x) = 6a \neq 0$ für alle x, denn $a \neq 0$

==> **W(-b/3a|f(-b/3a)) ist immer WP**

b) aus a) folgt: **$b = 0$, $d = 0$, $a \neq 0$, c bel.**

c) aus a) folgt: WP = O(0|0); $f'(0) = c = m$ ==> t: $y = cx$

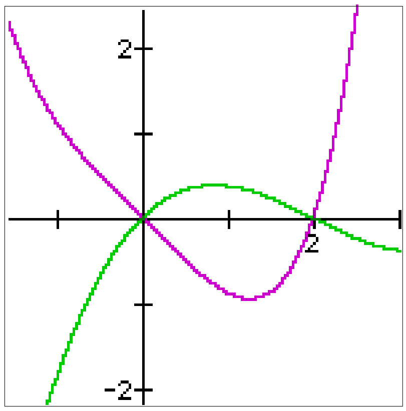
$t \cap p$: $cx = ax^3 + cx$ ==> $ax^3 = 0$

==> **$x = 0$ ist einzige Lösung, denn $a \neq 0$.**

54. $y = (x - 2)(x -(- 2))(x - (1 + \sqrt{3}))(x - (1 - \sqrt{3}) = (x^2 - 4)((x-1)-\sqrt{3})((x-1) + \sqrt{3})$

$= (x^2 - 4)(x^2 - 2x - 2) = \mathbf{x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 8x + 8}$

55. Nullstellen von p: $0 = x(x^3 - 8)/8 = x_1 = 2$; $x_2 = 0$



p*: $y^* = ax^3 + bx^2 + cx + d$; n_2 ==> $d = 0$;

$y'(0) = 0^3/2 - 1 = -1$ ==> $y^{*\prime}(0) = 1 = c$

$N_1 \in p^*$: $0 = 8a + 4b + 2$

$N_1 = WP$: $0 = 12a + 2b$

$0 = -16a + 2$ ==> $a = 1/8$; $b = -3/4$

==> **p*: $\mathbf{y = x^3/8 - 3x^2/4 + x}$**

56. p: $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$; $y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$; $y'' = 12ax^2 + 6bx + 2c$

$O \in p$ ==> $e = 0$; Extr. in O ==> $y'(0) = 0$ ==> $d = 0$

Steigung von OP: $m = 4:2 = 2 = y'(2)$

$P \in p$:	$4 = 16a + 8b + 4c$
$P = WP$:	$0 = 48a + 12b + 2c$
$m = y'(2)$:	$2 = 32a + 12b + 4c$

==> **p: $\mathbf{y = x^4/4 - 3x^3/2 + 3x^2}$**

57. P: $5 = 8a + 4b + 2c + d$
Q: $3 = a + b + c + d$
$f'(2) = 0$: $0 = 12a + 4b + c$
$f''(1) = 0$: $0 = 6a + 2b$

$\Longrightarrow a = -1; b = 3; c = 0; d = 1$
$\Longrightarrow$ **p: $y = -x^3 + 3x^2 + 1$**

58. p: $y = ax^4 + bx^2 + c$
$f'(2) = 0$: $0 = 32a + 4b$
$f'(\sqrt{3}) = \tan 30°$: $\pm 1/\sqrt{3} = 12\sqrt{3}\cdot a + 2\sqrt{3}\cdot b$ $\Longleftrightarrow \pm 1 = 36a + 6b$
$f(\sqrt{3}) = 0$: $0 = 9a + 3b + c$
$+ \Rightarrow a = -1/12; b = 2/3; c = -5/4$ $\Rightarrow$ **p_1: $y = -x^4/12 + 2x^2/3 - 5/4$**
$- \Rightarrow a = 1/12, b = -2/3, c = 5/4$ $\Rightarrow$ **p_2: $y = x_4/12 - 2x^2/3 + 5/4$**

59. $p''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c = 0$ hat keine Lösung $\Longleftrightarrow D = 36b^2 - 96ac < 0 \Longleftrightarrow$
$3b^2 < 8ac$

60. a) $(x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 3x - 36) : (x^2 - 3x - 4) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$
$\Longrightarrow$ **$x_3 = 3$ (doppelt)** Bem: $(x + 1)(x - 4) = x^2 - 3x - 4$

b) $x \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 7, \pm 21\}$; $\Sigma ai = -8 \Longrightarrow (x - 1) \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$
$\Longrightarrow x \in \{2, 0, 3, -1, 5, -3, 9, -7\} \Longrightarrow x \in \{-1, 3, -3, -7\}$ Probe $\Longrightarrow$ **$x_1 = -7$**
$(2x^3 + 14x^2 - 3x - 21) : (x + 7) = 2x^2 - 3 \Longrightarrow$ **$x_{23} = \pm\sqrt{3/2} = 1.225$**

61. $x \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36\}$;
$\Sigma ai = 11 \Longrightarrow (x - 1) \in \{\pm 1, \pm 11\} \Longrightarrow x \in \{2, 0, 12, -10\}$
$\Longrightarrow x \in \{2, 12\}$ Probieren $\Longrightarrow$ **$x_1 = 12$**
$(x^3 - 11x^2 - 15x + 36) : (x - 12) = x^2 + x - 3 \Longrightarrow$ **$x_{23} = 0{,}5(-1 \pm \sqrt{13}) = 1{,}30|-2{,}30$**

62. $x \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 7, \pm 14, \pm 28\}$;
$\Sigma ai = -6 \Longrightarrow (x - 1) \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\} \Longrightarrow x \in \{2, 0, 3, -1, 4, -2, 7, -5\}$
$\Longrightarrow x \in \{2, -1, 4, -2, 7\}$; Probieren $\Longrightarrow$ **$x_{12} = \pm 2$**
$(..) : (x^2 - 4) = x^2 - 6x + 7 \Longrightarrow$ **$x_{34} = 3 \pm \sqrt{2}$**

63. $x \in \{\pm 1, \pm 5, \pm 7, \pm 35\}$;
$\Sigma ai = 36 \Longrightarrow x \in \{2, 0, 3, -1, 4, -2, 5, -3, 7, -5, 10, -8, 13, -11, 19, -17, 37, -35\}$
$\Longrightarrow x \in \{-1, 5, -5, 7, -35\}$; Probe $\Longrightarrow$ **$x_1 = -5$; $x_2 = 7$**
$(x^4 - x^3 - 38x^2 - 33x + 35) : (x^2 - 2x - 35) = x^2 + x - 1$
$\Longrightarrow$ **$x_{34} = 0{,}5(-1 \pm \sqrt{5})$; $x_3 = 0{,}618$, $x_4 = -1{,}62$**

64. $(...) : (x + 2) = x^4 - 11x^2 + 30 \Longrightarrow x^2{}_{12} = 6; 5 \Longrightarrow$ **$L = \{-2, \pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{6}\}$**

65. $f(x) = x^3(x^4 - 16)(x^2 - x - 6) = x^3(x^2 + 2)(x - 2)(x + 2)(x + 2)(x - 3)$

$\mathbf{x_1 = 0}$ **(3-fach);** $\mathbf{x_2 = 2}$ **(1-fach);** $\mathbf{x_3 = -2}$ **(2-fach);** $\mathbf{x_4 = 3}$ **(1-fach)**

66. $p(x):(x+2)^2 = x^3 - 5x^2 - 7x + 6$

$x_2 \mid 6$ und $(x_2-1) \mid (-5)$ ...=> $x_2 \in \{2, 6\}$ Probe ==> $x_2 = 6$;

$(x^3 - 5x^2 - 7x + 6):(x-6) = x^2 + x - 1$ ==> $\mathbb{L} = \{-2, 6, (-1 \pm \sqrt{5})/2\}$

67. $p(x) = (x - 1)^3(x - (1 + \sqrt{3}))(x - (1 - \sqrt{3})) = (x^3 - 3x^2 + 3x - 3)(x^2 - 2x - 2) =$

$\mathbf{x^5 - 5x^4 + 7x^3 - x^2 - 4x + 2}$