Differenzieren 2

Gebr. rationale Funktionen

1. Leite ab: (Resultate vereinfacht, auf **einem** Bruchstrich; nur Exponenten aus $\mathbb{N}$, ev. mit Wurzeln):

a) $y = (2 - 5x) : (7x^2 + 4)^2$ mit Quotientenregel

b) Wie a), aber mit Produktregel

c) $y = \sqrt[5]{(x^2 + 3x + 1)^4}$

d) $y = \dfrac{1}{m^2 - n^2}(2x - 1)^{-\frac{m-n}{3}}$

2. Bestimme:

a) $\int (-\frac{4}{9} x^{-\frac{11}{15}})dx$

b) $\int_0^1 \dfrac{5x}{(7 - x\text{“})\text{“}} dx$

c) $\int \dfrac{\sqrt{20\grave{}x\text{¢}} - 2x\text{“} + 11}{3x\text{“}} dx$

c) $\int_2^x \dfrac{4\,dt}{(3 - 2t)\text{“}} = \dfrac{32}{17}$;x = ?

3. Bestimme die Kandidaten für die Extrema der Funktion :

$$I(x) = \int_{-1}^{x} \frac{(u + 2)(u - 3)}{u^6} du$$

4. Leite ab: a) nach der Quotientenregel b) nach der Produktregel und bringe beide Resultate je auf **einen** Bruchstrich; Exponenten nur aus $\mathbb{N}$:

$$y = \frac{3x}{(4 - x)^2}$$

5. Leite ab: (Resultate vereinfacht, auf **einem** Bruchstrich; nur Exponenten aus $\mathbb{N}$, ev. mit Wurzeln)

a) $y = \left(\dfrac{3x + 2}{3x - 2}\right)^2$

b) $f(x) = (3x + 4)(4x^2 + 1)(4 - 3x)$

c) $g(x) = \dfrac{n!}{(1 + x)^{n+1}}$

d) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{11x - x^2}}$

e) $i(x) = x^2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$

6. Suche Stammfunktionen zu

a) $f(x) = (2x - 8)^2$ b) $g(h) = \dfrac{5}{2h^3}$ c) $e(s) = \dfrac{a}{(b - cs)^2}$

d) $w(x) = \sqrt{ax + b}$

7. An welchen Stellen sind für die folgende Funktion $I(x)$ Extrema möglich ?

$$I(x) = \int_{-8}^{x} \frac{t^2 - 5t + 6}{t^7}\, dt$$

8. Bestimme:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$ b) $\displaystyle\int_{1}^{100} \frac{1}{100}(100 - t)^3 dt$ c) $\displaystyle -\int_{5}^{-5} x^{2n+1} dx$; $n \in \mathbf{N}$

9. Bestimme die erste Ableitung und vereinfache so weit wie möglich:

a) $y = (2 - 3x)^3$ b) $y = \dfrac{1 - x}{1 + x}$ c) $y = \dfrac{x^3}{(ax^2 + b)^2}$

10.

Die Potenzregel $(y = x^k \;\Rightarrow\; y' = k \cdot x^{k-1})$ gilt für alle $k \in \mathbf{R}$.

Leite damit folgende Funktionen ab:

a) $y = x^{\pi}$ b) $y = \sqrt[6]{x}$ c) $y = \sqrt{x^2 + 2}$ d) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{1 - x}}$

11.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1 + 2x)^3 dx = ?$ b) $\displaystyle\int \frac{a}{(b - cx)^2}\, dx = ?$

12. Leite ab a) mit der Produktregel b) mit der Kettenregel:

$y = (2x^7 - 3)^2$

13. Leite ab a) mit der Quotientenregel b) mit der Produktregel:

$y = (x^2 - 4) : x$

14. Leite ab:

a) $y = (2x - 3)(x^2 + 4)(3 + 2x)$ b) $s = (at^2 - b)^5$ c) $y = \dfrac{11x^2 - 4}{2 - x}$

d) $y = \dfrac{1}{(x^2 - 4)^2}$ e) $s = \dfrac{(a + t)^2}{(a - t)^3}$ f) $F(x) = \left[\, g(x) \,\right]^k$

g) $H(x) = f(5x^2-3x)$ h) $I(x) = \displaystyle\int_{-19}^{x} \frac{\sqrt[9]{t}}{2^t}\, dt$

15. Suche Stammfunktionen zu:

a) $f(x) = (3x - 7)^3$ b) $g(x) = \dfrac{2}{x^3}$ c) $h(z) = \dfrac{4}{(1 - x)^3}$

16. Bestimme:

a) $\displaystyle\int \frac{n!}{x^{n+1}}\, dx$ b) $\displaystyle\int_0^{10} \frac{1}{3}(1 - t)^4 dt$ c) $\displaystyle\int_0^5 \frac{du}{(4 - 3u)^3}$

17. Bestimme a, b, c und d so, dass die Kurve $y = (ax^2 + bx + c)/(x + d)$ die Asymptoten $x = 3$ und $y = x + 12$ und an der Stelle $x = -3$ ein Extremum hat.

18.

Diskutiere: $f(x) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{x^3}{(x + 1)^2}$

Zeichne den Graphen für $-9 \leqslant x \leqslant 7$; Einheit: 2H

19.

Gegeben: $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + 1}{x^2 + bx + 1}$; $a \neq b$.

a) Beweise: Die ersten Koordinaten der Extrema von f sind unabhängig von a und b.

b) Welche Beziehung zwischen a und b muss gelten, damit die Summe der zweiten Koordinaten der Extrema Null ist ?

Im folgenden sei $a = -4$ und $b = -1$.

c) Diskutiere f (ohne Wendepunkte, Graph: A4, quer, LE = 4H)

20. Gegeben: $f(x) = (x^2 + 2)/x^2$

a) Welcher Punkt des Graphen von f liegt dem Punkt A(0|1) am nächsten ?
(Tipp: untersuche das Quadrat der Entfernung)

b) Bestimme den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f sowie den Geraden g_1: y = 1, g_2: x = 0.5 und g_3: x = 3 eingeschlosen wird.

21.

Diskutiere: $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ (Graph für $-4 \leqslant x \leqslant 4$; LE = 4H)

22. Mit $y = f_k(x) = k\cdot(x^2 + 2x):(x - 1)^2$ ist eine Schar von Funktionen gegeben. Zu jedem Wert des Parametrs $k \neq 0$ gehört eine Funktion $f_k(x)$.

a) Diskutiere $f_1(x)$ (LE = 4H).

b) k_1 und k_2 seinen zwei Parameterwerte, für die sich die zugehörigen Kurven im Ursprung rechtwinklig schneiden. Welche Beziehung besteht zwischen k_1 und k_2 ?

c) Wie b), aber für die vom Ursprung verschiedene Nullstelle.

d) Gibt es in dieser Schar auch Kurven, die sich in beiden Nullstellen rechtwinklig schneiden ?

23. Gegeben: $f(x) = \dfrac{a + x^3}{b\cdot x}$; $a,b \in \mathbb{R}$

a) Für welche Werte von a und b hat der Extrempunkt des Graphen von f die Koordinaten (2|12) ?

b) Diskutiere die Funktion für a = 54, b = 9 (LE = 2H; $x \in [-8; 8]$, ganze A4-Seite).

c) Bestimme für a = 54 und b = 9 die ersten Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen mit der Kurvennormalen in P(-6|?).

24.
Diskutiere: $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{2x^2}$

25.
Diskutiere: $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$

26.
$y = \dfrac{(x - 2)^2}{x}$

Bestimme Nullstellen, Extrema, Wendepunkte sowie das Verhalten für x --> ±∞ (Graph nicht notwendig).

27. Ein Fabrikant will abgeschlossene Blechbehälter herstellen, die die Form eines Zylinders mit aufgesetzter Halbkugel haben und genau 1 Liter fassen sollen.
Wie gross wird er den Zylinderradius wählen, wenn er möglichst wenig Blech verbrauchen will ?
Welches ist der grösste Radius, der überhaupt möglich ist ?

28. Gegeben ist die Kurve $y = \frac{4}{x^2}$; $x \in \mathbf{R}^+$

a) Welcher Punkt der Kurve liegt am nächsten beim Ursprung ?
b) Es sei $k > 1$. Gib einen Ausdruck an für die Fläche unter der Kurve für $1 \leqslant x \leqslant k$.
c) Berechne diese Fläche für $k = 100$. Wie gross ist die ins "Unendliche" reichende Fläche ?

29. Spiegle die Kurve k_1: $y = x^2/4$ an der Geraden w: $y = x$. Die Kurve k_1 und ihr Spiegelbild k_2 beranden ein Flächenstück (Zweieck).
a) Bestimme die Fläche des Zweiecks.
b) Bestime die Winkel des Zweiecks.
c) Bestimme die Breite des Zweiecks, d.h. den grössten Abstand a zweier zur Geraden w symmetrischer Punkte des Zweiecks.
d) Wie gross ist das Volumen des Körpers, der durch Rotation des Zweiecks um die y-Achse entsteht ?
e) Berechne das Fassungsvermögen der bei d) entstandenen "Schale".

30. Die Kurven C_1: $y = 4/x$ und C_2: $y = 5x - x^3$ beranden im ersten Quadranten ein Flächenstück. Berechne das Volumen des Ringes, der durch Rotation dieses Flächenstücks um die x-Achse entsteht.

31. Verschiebe die Kurve k_1: $y = x^2 / 32$ soweit in Richtung der y-Achse, bis sie die Kurve k_2: $y = \sqrt{x}$ berührt.
a) Bestimme die Gleichung der verschobenen Kurve k_3.
b) Bestimme die Fläche, die von k_2, k_3 und der y-Achse begrenzt ist.

32. Der Kühlturm eines AKW´s sei ein Rotationskörper (Höhe: 40m, unterer und oberer Durchmesser: je 20m, kleinster Durchmesser: 10m; alles Innenmasse). Über die Form des Turmes lässt sich folgendes sagen: In jeder Schnittebene, welche die Rotationsachse enthält, erscheinen die Wände als quadratische Parabeln.
Berechne das Volumen des Kühlturmes.

33. Einer Kugel vom Radius 1 ist ein gerader Kreiszylinder mit maximaler Oberfläche einzubeschreiben. Wie gross ist sein Radius ?

34. Gegeben sind die Kurven k_1: $y = 0{,}5(x - 2)^2$ und k_2: $y = 0{,}5(x + 2)^2$.
a) Bestimme den Schnittwinkel der beiden Kurven.
b) Berechne den Inhalt der Fläche, die von k_1, k_2 und der x-Achse eingeschlossen wird.
c) Der in b) betrachteten Fläche soll ein Rechteck ABCD maximalen Inhalts einbeschrieben werden, wobei die Ecken A und B auf der x-Achse liegen. Bestimme den Inhalt dieses Rechtecks sowie die Koordinaten der Ecke C.

35. Ein Quadrat hat Seiten der Läge x. Über jeder Seite wird ein gleichschenkliges Dreieck mit Schenkeln der Länge a (= konstant) errichtet. Für welche Wahl von x wird die Fläche des entstandenen 8-Ecks (Stern) am grössten und wie gross ist dieses Maximum ?

36. a) Diskutiere die Funktion $f(x) = (x^3 + 1)/x^2$
b) Welcher Punkt des Graphen liegt dem Ursprung am nächsten ?
(nur x-Koordinate bestimmen)

37. Bestimme:

a) $\int (-\frac{4}{9} x^{-\frac{11}{15}})\, dx$ b) $y = \sqrt{x \cdot \sin x}$; $y' = ?$

c) $\int \frac{\sqrt{2} \cdot x^4 - 2x^2 + 11}{3x^2}\, dx$ d) $\int_2^x \frac{4\, dt}{(3 - 2t)^2} = \frac{32}{17}$; $x = ?$

38. Leite ab: $F(x) = (g(x))^k$

39. Leite ab:
a) $F(x) = f(3x^2 - 3x)$ b) $F(x) =$

Exponentialfunktionen

40. a) Bestimme die Fläche zwischen der Kurve $y = e^x$, der x-Achse und den Geraden g: $x = 0$ und h: $x = -5$.

b) Wie a), wähle aber h: $x = k$, $k \in \mathbb{Z}^-$.

c) Nenne das Resultat von b) F(k) und bestimme $\lim\limits_{k \to -\infty} F(k)$.

d) Wie a), b) und c) für das Volumen V jenes Körpers, der durch Rotation der Fläche um die x-Achse entsteht.

41. a) Diskutiere: $f(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$; LE = 4H.

b) Bestimme die Fläche G(k), welche im 1. Quadranten vom Graphen von f, von der x-Achse sowie von der Geraden g: $x = k$ eingeschlossen wird. Berechn e auch den Grenzwert von G für $k \to \infty$.

c) Die unter b) berechnete "Grenzfläche" G wird durch die Gerade h: $x = c$ halbiert. c = ?

42.

a) Diskutiere: $f(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{(1 - \frac{x^2}{2})}$.

b) Eine Stammfunktion von f hat die Form $F(x) = A \cdot x \cdot e^{(1 - \frac{x^2}{2})} + B$.

Bestimme A und B (geht leider nicht direkt mit TR).

c) Berechne die Fläche I(k), die vom Graphen von und der x-Achse im Bereich $1 \leqslant x \leqslant k$ eingeschlossen wird. Bestimme auch $\lim\limits_{k \to \infty} I(k)$.

43. Diskutiere: $f(x) = \ln(x^2)/x$

44. Leite ausführlich von Hand ab:

a) $y = x^2 \cdot e^{-x}$ b) $y = 3 \cdot \ln(x^2 - 0.5x)$ c) $y = 3^{3x^3 + 3}$ d) $y = x^2 \cdot \log_2(2x)$

45. Berechnevon Hand: $\int_1^2 (e^x + \frac{5}{x})dx$

46. Die Gerade g: $x = a$ schneidet die Beiden Kurven k_1: $y = 2 + x^2/8$ und k_2: $y = \ln(x)$ in den Punkten P und Q. Für welches a wird $\overline{PQ}$ minimal ?

47. Bestimme Schnittpunkt und -winkel der Kurven k_1: $y = \ln(2x - 1)$ und k_2: $y = \ln(x + 3)$

48. Leite ab:

a) $y = x^e \cdot e^x$ b) $y = 3^{4x^5 + 6}$ c) $y = x^3 \cdot \log_4(5x^6)$

49. Die Kurve k: $y = e^x$ wird von einer quadratischen Parabel p auf der y-Achse rechtwinklig geschnitten. k und p schneiden sich ausserdem an der Stelle $x = 1$.
Bestimme die Fläche, die von k und p zwischen diesen zwei Schnittpunkten eingeschlossen wird.

50. a) Bestimme die Gleichung der Asymptote a der Funktion $f(x) = (e^x - 1) : e^x$ für $x \to \infty$. Berechne die Fläche F(k) die eingeschlossen ist vom Graphen von f, der Asymptote sowie den Geraden mit den Gleichungen $x = 0$ und $x = k$. Gib auch den Limes von F(k) für $k \to \infty$ an.
b) Bestimme den Schnittpunkt der Kurvennormale des Graphen von f im Punkt P(1 | ...) mit der y-Achse.

Trigonometrische Funktionen

51.

a) Beweise durch Ableiten: $\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cdot \cos x)$

b) Bestimme: $\int 2 \cdot \sin(2x + 2) dx$

c) Bestimme mit Hilfe der Integralrechnung das Volumen eines Kreiszylinders mit Radius r und Höhe h !

52. Einem Rotationsparaboloid ist ein Kreiszylinder ($r = 0.5$, $h = 1$) einbeschrieben. Bestimme die Paraboloidhöhe H so, dass das Paraboloidvolumen minimal wird.

53. Gegeben sind die Kurven c_1: $y = \sin x$ und c_2: $y = k + \cos x$, $k \in \mathbb{R}$.

a) Für welche Werte von k haben c_1 und c_2 gemeinsame Punkte ?

Im folgenden sei $k = 1$.

b) Bestimme die Koordinaten der Schnittpunkte von c_1 und c_2 im Intervall $[0, 2\pi]$, den Winkel zwischen den Kurven in einem der Schnittpunkte sowie den Schnittpunkt der Tangente an c_1 im Ursprung und der Normalen zu c_2 in $Q(4\pi/3|...)$.

c) Im Intervall $[0, 2\pi]$ gibt es ein Flächenstück, das ganz von c_1 und c_2 berandet ist . Bestimme das Volumen des Körpers, der durch Rotation dieses Flächenstücks um die x-Achse entsteht.
(Tip: $\int \sin^2 x \, dx = 0{,}5(x - \sin x \cdot \cos x)$!)

54. Einer Halbkugel mit Radius 1 ist ein Kegel kleinsten Volumens umzubeschreiben. Gib Grundkreisradius, Höhe und Volumen diese Kegels an.

55. Der Graph von $y = \cos x$ ist in y-Richtung so weit nach unten zu verschieben, bis er den Graph von $y = \sin x$ im Bereich $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ berührt.

a) Gib die Gleichung der verschobenen Kurve an.

b) Bestimme die Fläche, die eingeschlossen wird von der Kurve $y = \sin x$ und der verschobenen Kurve im Bereich zwischen y-Achse und Berührpunkt.

56. Diskutiere: $y = \cos x - \cos 2x$; $x \in [0, 2\pi]$.

57. Leite ab (Resultate auf **einen** Bruchstrich, nur **natürliche** Exponenten):

a) $y = x \cdot \sin x \cdot \cos x$ b) $y = 2x \cdot \ln(3x^4 - 5)$

c) $y = \sqrt{x} \cdot \sin^2(2x)$ d) $y = \sqrt[3]{16 - 5x^2}$

58. Bestimme:

a) $\int \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx$ b) $\int (2 - 2\cos(2x))\,dx$ c) $\int_{\frac{1}{e}}^{2e} \frac{5}{7} x^{-1} dx$ d) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{du}{\sin^2 u}$

59. a) Bestimme die Fläche des Kurvenzweiecks, das ganz von den Graphen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ berandet ist und das ganz im Bereich $0 < x < 2\pi$ liegt (Tip: sorgfältige Skizze !).

b) Die Gerade $x = a$ schneidet dieses Zweieck in den Punkten P und Q derart, dass $\overline{PQ} = 1/\sqrt{2}$. Bestimme a.

c) Bestimme einen Winkel im Zweieck.

60. Leite ab (Resultate auf **einen** Bruchstrich, nur positive Exponenten):

a) $y = \sin x \cdot \cos x$ b) $y = \sqrt{x \cdot \sin x}$ c) $y = \dfrac{x^2}{\tan 2x}$

61. Bestimme:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\,dx$ b) $\displaystyle I(x) = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{x} \frac{du}{\cos^2 u}$ c) $\displaystyle\int (2 - 2 \cdot \sin(2x))\,dx$

62. Bestimme a und b so, dass die Kurve $y = a \cdot \cos x + b \cdot \sin x$ die x-Achse an der Stelle $x = \pi/4$ schneidet und an der Stelle $x = 5\pi/6$ die Steigung $m = 0.5 \cdot (\sqrt{3} - 1)$ hat. Unter welchem Winkel schneidet die Kurve die x-Achse an der Stelle $x = \pi/4$?

63. Die Graphen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ beranden unendlich viele kongruente Flächenstücke (Kurvenzweiecke).

a) Berechne die Fläche eines solchen Zweiecks.

b) Die Gerade $x = a$ schneidet jenes Zweieck, das ganz im Bereich $0 < x < 2\pi$ liegt, in den Punkten P und Q. Gib alle Werte von a an, für die gilt: $\overline{PQ} = 1/\sqrt{2}$.

c) Der oberhalb der x-Achse liegende Teil eines solchen Zweiecks wird um die x-Achse rotiert. Bestimme das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

64. Einer Halbkugel vom Radius $r = 1$ ist ein Kegelzelt (ohne Boden) umschrieben. Bestimme die Fläche des Kegelmantels in Abhängigkeit des halben Öffnungswinkels φ und berechne dann die kleinstmögliche Mantelfläche.

65. Geg: $f(x) = \cos x - \cos 2x$; $x \in [0, 2\pi]$. Bestimme die Nullstellen sowie die x-Koordinaten der Punkte mit horizontalen Tangenten.

66. a) Bestimme die Fläche des Kurvenzweiecks, das ganz von den Graphen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ berandet ist und das ganz im Bereich $0 < x < 2\pi$ liegt (Tip: sorgfältige Skizze !).

b) Die Gerade $x = a$ schneidet dieses Zweieck in den Punkte P und Q derart, dass $\overline{PQ} = 1/2$. Bestimme a.

c) Bestimme einen Winkel im Zweieck.

67.

a) Bestätige durch beidseitiges Ableiten: $\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cdot \cos x)$

b) Bestimme: $\int 2 \cdot \sin(2x + 2) dx$

c) Berechne: $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{3\pi} \cos(\frac{x}{3}) dx$

68. Einer Halbkugel vom Radius $r = 1$ ist ein Kegelzelt (ohne Boden) umschrieben. φ sei der halbe Öffnungswinkel des Kegels.

a) Beweise folgende Formel für die Fläche des Kegelmantels:

$$M(\varphi) = \pi : (\sin(\varphi) \cdot \cos^2(\varphi)).$$

b) Berechne die kleinstmögliche Mantelfläche.

69. Beweise die Formel für das Kreiskegelvolumen von Hand mit Hilfe der Integralrechnung.

70. Die Kurve k: $y = \sqrt{x} \cdot (4 - x)/4$ rotiert um die x-Achse und erzeugt einen Rotationskörper.

a) Bestimme Volumen, Oberfläche sowie die maximale Querschnittsfläche des Körpers.

b) Berechne die Länge der Kurve zwischen den beiden Nullstellen.

c) Schreibe die Krümmungsfunktion s(x) für k auf (ohne Wurzeln, Bruchstriche nur im Exponenten). Gib den Radius des Krümmungskreises an k im Punkt P(4/3 | .....)

Diverse Anwendungen

71. Die Fläche, begrenzt durch die Kurven $y = 0$, $y = 2$, $x = 0$ und $y = ax^2 - 1$, wird um die y-Achse rotiert. Das Volumen des entstehenden Rotationskörpers ist 20. Bestimme a.

72. Gegeben: Parabel p: $y = ax^2$; Punkt $P(1 \mid 2) \in p$.
Der Parabelbogen vom Ursprung bis zu P wird um die y-Achse gedreht. Das entstandene Paraboloid wird zylindrisch durchbohrt (Bohrachse = y-Achse). Bei welchem Bohrradius hat der durchbohrte Körper genau das halbe Volumen des Paraboloides ?

73. Gegeben sind die Parabel p: $y = 0.25x^3$ samt Tangente t an p in P(2] ...).
p und t schliessen im ersten Quadranten mit der x-Achse ein Flächenstück ein, welches um die x-Achse gedreht wird. Welches Volumen hat der entstehende Rotationskörper?

74. Gegeben: $f(x) = x \cdot \sqrt{4 - x^2}$

a) Bestimme Definitionsbereich, Nullstellen, Extrema.
b) Berechne die Länge des Graphen im gesamten Definitionsbereich.
c) Das des Graphen zwischen Ursprung und positiver Nullstelle rotiert um die x-Achse. Wie gross ist das Volumen des Rotationskörpers?
d) Der Rotationskörper aus c) wird mit einer gleichmässigen Goldschicht überzogen (Einheit im KS: 1cm, Masse des verbrauchten Goldes: 1g, Dichte: $\rho_{Gold} = 19.29\ g/cm^3$).
Wie dick ist die Goldschicht?

75. Leite die Formel für das Volumen eines Kreiskegelstumpfes mit Hilfe der Integralrechnung her (Bei vollständig händischer Rechnung : +2P).

76. Die Gleichung $f_k(x) = \sin^2 x + k \cdot (-1 + \cos x)$ mit $-\infty < k < \infty$ bestimmt eine Kurvenschar.

a) Zeige, dass die Graphen für jedes k an der Stelle $x = 0$ die x-Achse berühren. Für welche k haben die Funktionen dort ein rel. Minimum ?

b) Diskutiere die Funktionen für $k = 0$ und $k = 1$ im Intervall $[-\pi, 2\pi]$ (ohne Wendepunkte, Graphen in ein KS).

77. a) Diskutiere: $f(x) = x \cdot e^{-x}$ (LE = 5H)

b) Leite ab: $F(x) = -x \cdot e^{-x} - e^{-x}$

c) Bestimme die Fläche A(k), die vom Graphen von f, von der x-Achse sowie von den Geraden x = k und x = 2k berandet ist (k > 0).

d) Bestimme das Maximum von A(k).

78. Für welche Punkte der Kurve $y = 0.5x^2 - 2x$ ist der Abstand von P(4|2) extremal ? Bestimme mit einer Skizze die Art der Extrema und gib die zugehörigen Abstände an. (Tipp: Untersuche das Quadrat des Abstandes)

79. Geg: $f(x) = (1 - x/k) \cdot \sqrt{x}$; $k > 0$; $0 \leqslant x \leqslant k$.
Durch Rotation des Graphen um die x-Achse entsteht ein Drehkörper mit Volumen V. Für welche Werte von k ist $V = 4\pi/3$?
Wie gross ist in diesem Fall der Radius des grössten "Breitenkreises" ?

80. Gegeben: $f(x) = \ln(x)/x^2$.
a) Beweise: $\int f(x)\,dx = -(1 + \ln(x))/x + C$. b) Diskutiere f.
c) Die Fläche zwischen Kurve, x-Achse und den Geraden x = 1 und x = a (a > 1) sei mit F(a) bezeichnet. Bestimme F(a) und $F(e^2)$ sowie den Grenzwert von F(a) für a --> ∞.

81. Bestimmevon Hand: a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(3+4x)^5}}\,dx$ b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{15}{7} \cdot x^{-1} \cdot \pi^2\,dx$

Differenzieren 2 : Lösungen

1. a) $y' = (-5(7x^2 + 4)^2 - (2 - 5x)\cdot 2(7x^2 + 4)\cdot 14x)/(7x^2 + 4)^4$
$= \mathbf{(105x^2 - 56x - 20)/(7x^2 + 4)^3}$
b) $y' = -5(7x^2 + 4)^{-2} + (2 - 5x)(-2)(7x^2 + 4)^{-3}\cdot 14x$
$= \mathbf{(105x^2 - 56x - 20)/(7x^2 + 4)^3}$
c) $y' = 4/5 \cdot (x^2 + 3x + 1)^{-1/5}\cdot(2x + 3) = \mathbf{4(2x + 3)/(5\cdot\sqrt[5]{x^2 + 3x + 1})}$
d) $y' = 1/(m^2 - n^2) \cdot (-(m - n)/3)(2x - 1)\uparrow(-(m - n)/3 - 1)$
$= \mathbf{-2/(3(m + n)) \cdot \sqrt[3]{(2x - 1)\uparrow(-m + n - 3)}}$

2. a) $\mathbf{-5/3 \cdot x^{4/15} + C}$ b) $5/2 \cdot (7-x^2)^{-1}|_0^1 = \mathbf{5/84 = 0.05952}$
c) $\sqrt{2}x^3/9 - 2x/3 - 11/(3x) + C = \mathbf{(\sqrt{2}x^4 - 6x^2 - 33)/(9x) + C}$
d) $2(3 - 2t)^{-1}]_2^X = 2/(3-2x) + 2 = 32/17 \Longrightarrow \mathbf{x = 10}$

3. $I'(x) = 0 \iff \mathbf{x_1 = -2;\ x_2 = 3}$

4. $y' = [3\cdot(4-x)^2 - 3x\cdot 2(4-x)(-1)]/(..)^4 = (3x + 12)/(4 - x)^3$
$= 3\cdot(4-x)^{-2} + 3\cdot x\cdot(-2)(4-x)^{-3}\cdot(-1) = 3/(4-x)^2 + 6x/(4-x)^3 = ...$

5. a) $y' = 2((3x+2)/(3x-2)) \cdot (3(3x-2)-(3x+2)\cdot 3)/(3x-2)^2 = -24(3x+2)/(3x-2)^3$
b) $y = (4x^2+1)(16-9x^2) = -36x^4 + 55x^2 + 16;\ y' = -144x^3 + 110x$
c) $y = n!(1+x)^{-(n+1)}$; $y' = -n!(n+1)(1+x)^{-(n+2)} = -(n+1)!/(1+x)^{(n+2)}$
d) $y = (11x-x^2)^{-1/3};\ y' = -1/3 \cdot (11x - x^2)^{-4/3}\cdot(11 - 2x)$
$= -(11-2x)/(3\cdot\sqrt[3]{(11x-x^2)^4})$
e) $y' = 2x\cdot\sqrt{..} + x^2\cdot 0.5\cdot(a^2-x^2)^{-0.5}\cdot(-2x) = (2a^2x - 3x^3)/\sqrt{a^2-x^2}$

6. a) $(2x - 8)^3/6$ b) $-5/4h^2$ c) $a/(c(b - cs))$ d) $2/3a \cdot (ax + b)^{3/2}$

7. $x_1 = 2,\ x_2 = 3$

8. a) $\mathbf{2\sqrt{x} + C}$ b) $-1/400 \cdot [(100 - t)^4]_1^{100} = \mathbf{240'149}$
c) ${}_{-5}\int^5 x^{2n+1}dx = [x^{2n+2}/(2n+2)]_{-5}^5 = [g(x)]_{-5}^5$ mit g:gerade $= \mathbf{0}$

9. a) $y' = -9(2 - 3x)^2$ b) $y' = -2/(1 + x)^2$ c) $y' = (3bx^2 - ax^4)/(ax^2 + b)^3$

10. a) $\pi x^{\pi-1}$ b) $x^{-5/6}/6 = 1/(6\cdot\sqrt[6]{x^5})$ c) $x/\sqrt{x^2+2}$ d) $x(4 - 3x)/2(1 - x)^{3/2}$

11. a) $1/8 \cdot [(1 + 2x)^4]_{-1}^1 = 10$ b) $a/(c(b - cx) + C$

12. a) $14x^6(2x^7 - 3) + (2x^7 - 3)\cdot 14x^6 = \mathbf{28x^6(2x^7 - 3)}$
b) $2(2x^7 - 3)\cdot 14x^6 = \ldots$

13. a) $(2x\cdot x - (x^2 - 4)\cdot 1)/x^2 = \mathbf{(x^2 + 4)/x^2}$
b) $((x^2 - 4)\cdot x^{-1})' = 2x\cdot x^{-1} + (x^2 - 4)(-1)x^{-2} = 2 + (4 - x^2)/x^2 = ..$

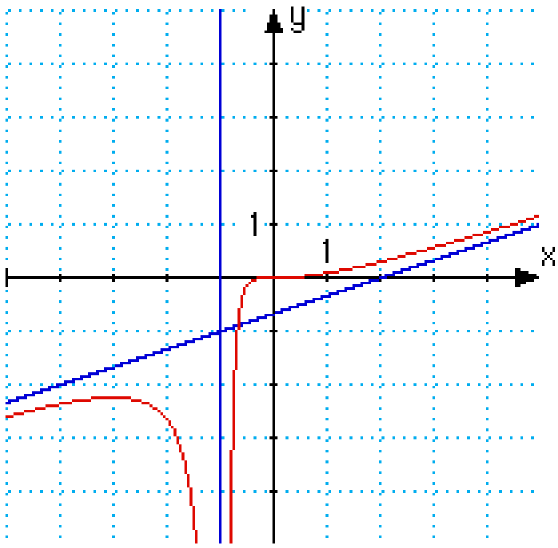
14. a) $16x^3 + 14x$ b) $10at(at^2 - b)^4$ c) $(-11x^2 + 44x - 4)/(2 - x)^2$
d) $-4x/(x^2 - 4)^3$ e) $(5a^2 + 6at + t^2)/(a - t)^4 = (t + a)(t + 5a)/(a - t)^4$
f) $k[g(x)]^{k-1}\cdot g'(x)$ g) $f`(5x^2-3x)*(10x - 3)$
h) $\sqrt[9]{x}/2^x$

15. a) $(3x - 7)^4/12$ b) $-x^2$ c) $2/(1 - x)^2$

16. a) $-(n - 1)!/x^n + C$
b) $-1/15 \cdot [(1 - t)^5]^{10}_0 = -1/15 \cdot [(-9)^5 - 1] =$ **11810/3**$= 3936.6$
c) $1/6 \cdot [1/(4 - 3u)^{-2}]^5_0 = 1/6 \cdot [1/(-11)^2 - 1/16] = 1/726 - 1/96$
$= -105/11616 =$ **- 35/3872** $= -0.0090393$

17. Pol ==> d = -3;
$(ax^2 + bx + c):(x - 3) = ax + (b+3a) + (9a+3b+c)/(x-3)$ ==> a = 1, b = 9
$y' = (x^2 - 6x - 27 - c)/(x-3)^2$; $y'(-3) = 0$ ==> c = 0
(a, b, c, d) = (1, 9, 0, -3)

18. $y' = (x^3 + 3x^2)/(3(x + 1)^3)$; $y'' = 2x/(x + 1)^4$
1. k.S.
2. N:$x_1 = 0$; Pol: $x_2 = -1$; $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
3. $y' = 0$: $x_1 = 0$ (doppelt)
$x_3 = -3$
$y''(0) = 0$; $y''(-3) = -3/8$
H(-3 | -2.25)
4. $y'' = 0$: $x_1 = 0$; y'' wechselt
bei x_1 das Zeichen
Terrp. N(0|0)
5. $x^3:(3x^2+6x+3) = x/3 - 2/3 +$
$+ (2x + 3)/(3\cdot(x+1)^2)$
A(x) = x/3 - 2/3; vert. As.: x =-1

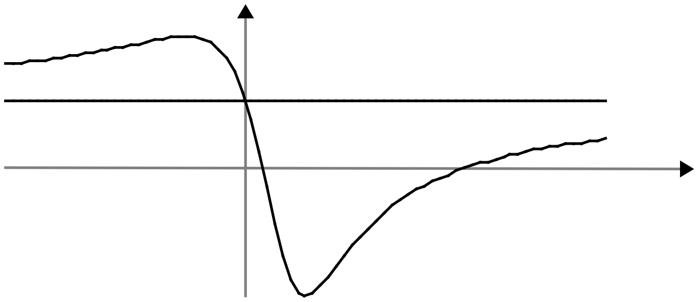


19. d) Beweise: Die Wendepunkte von f liegen auf der Geraden $y = -x$.

a) TR: $f'(x() = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ oder $x_2 = -1$ oder $a-b=0$ (letzteres ist nicht möglich), also **x_1 und x_2 unabh. von a und b.**

b) TR: $f(x_1) + f(x_2) = 2(ab-4)/((b-2)(b+2))=0 \Rightarrow$ **ab = 4**

c) TR: $D = \mathbb{R}$, keine Pole, Nullstellen: TR: $2-\sqrt{3}$ und $2+\sqrt{3}$, keine Symmm. ers.



$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ oder $x_2 = -1$

$f''(1) = 6$, $f''(-1) = -2/3$

$\Rightarrow$ **T(1|-2), H(-1 | 2)**

$f''(x) = 0$ TR: $x = 1.53209$

und $x = -1.8794$

und $x = 0.34732$

etc

lim $(x \to +-\infty)$ $(f(x) = 1$, horiz. As. **a(x) = 1**

20. a) $d^2 = x^2 + ((x^2 + 2)/x^2 - 1)^2 = x^2 + 4/x^4$

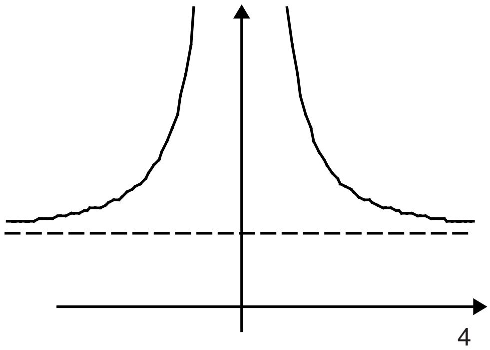
$d^{2\prime} = 2x - 16x^{-5} = 0$

$\Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

für $x \to \pm\infty$ und $x \to \pm 0$ gilt: $d^2 \to \infty$

d^2 stetig in $\mathbb{R}\backslash\{0\} \Longrightarrow$ Minimum

$\Longrightarrow P_{12}(\pm\sqrt{2} \mid 2)$

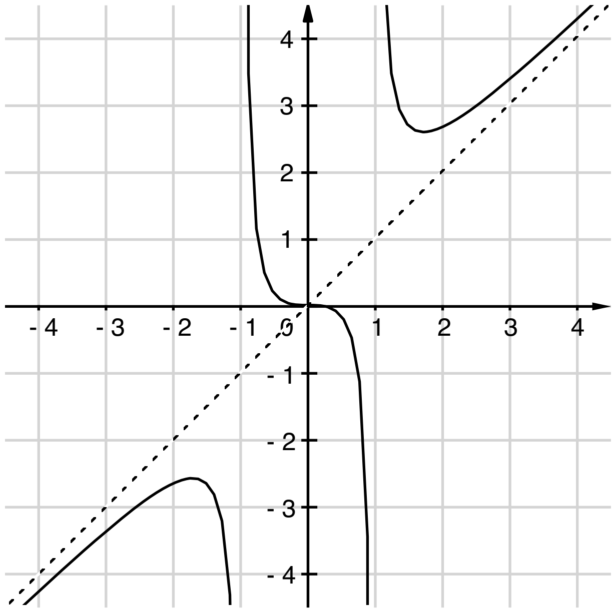


b) $F = {}_{0.5}\int^{3} (1 + 2/x^2 - 1)dx = 2\int x^{-2}dx$

$= 2[-x^{-1}]_{0.5}^{3} = 10/3$

21. $y' = (x^4-3x^2)/(x^2-1)^2$;

$y'' = (2x^3+6x)/(x^2-1)^3$



1. Symm. bez. Ursprung, $D = \mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$;
   Pole bei $x_{12} = \pm1$; N(0|0)
2: $y' = 0 \Rightarrow x_3 = 0$; $x_{45} = \pm\sqrt{3}$
   $y''(0) = 0$??; y'wechselt bei $x_3 = 0$
   das Zeichen nicht
   => kein Extremum bei x_3.
   $y''(x_4) = 3\sqrt{3}/4$
   => $T(\sqrt{3} \mid 3\sqrt{3}/2) = T(1.73 \mid 2.60)$
   $H(-\sqrt{3} \mid -3\sqrt{3}/2) = H(-1.73 \mid -2.60)$
3. $y''=0 \Rightarrow x_3 = 0$; y''wechelt bei x_3
   das Zeichen (von + auf -)
   => TrP(0 | 0)
4. lim für $x \to \pm\infty$ von $y = \pm\infty$
   $y = x + x/(x^2-1) \Rightarrow A(x) = x$, vert. As.: $x = \pm1$

weitere Punkte: (±4 | ±4.27); (±3 | ±3.375); (±1.5 | ±2.7); (±0.5 | -+1.67)

22. a_1) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; Pol: $x_1 = 1$;

k. Symm. ers.; N: $x_1 = 0$; $x_3 = -2$

a_2) $f`(x) = (-4x-2)/(x-1)^3$

$f``(x) = (8x+10)/(x-1)^4$

$f``(-0.5) = 32/27 \Rightarrow T(-0.5 \mid -1/9)$

a_3) f`` wechselt bei -5/4 von

- auf + => WP(-9/4 | -5/27)

= WP(-1.25 | -0.1852)

a_4) $x \longrightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \longrightarrow 1$, $a(x) = 1$

b) $f_k(0) = 0\ \forall k$; $f_k'(x) = k\cdot f`(x)$, $f_k'(0) = 2k\ \forall k \implies 2k_1 = -1/2k_2 \implies k_1 = -1/4k_2$

c) $f_k(-2) = 0\ \forall k$; $f_k'(-2) = -2k/9\ \forall k \implies -2k_1/9 = +9/2k_2 \implies k_1 = -81/(4k_2)$

d) $-1/4k_2 = -81/(4k_2)$ ist unmöglich

23. a) $f'(x) = (2x^3 - a)/bx^2 = 0$

$\Longrightarrow x = (a/2)^{1/3} = 2 \Longrightarrow$ **$a = 16$**

$f(2) = 12/b = 12 \Longrightarrow$ **$b = 1$**

b) $f'(x) = (2x^3 - 54)/9x^2$

$f''(x) = (2x^3 + 108)/9x^3$

1. keine Symm. ers.

2. $N(x_1=-3\cdot 2^{1/3}|0) = N(-3.78|0)$

Pol bei $x = 0$

3. $f'(3) = 0$, $f''(3) > 0 \Longrightarrow T(3|3)$

4. $f''(x_1) = 0$, Zeichenwechsel

$\Longrightarrow$ WP = N

5. $A(X) = x^2/9$

$P_1(1|55/9)$, $P_2(6|5)$, $P_3(-7|4.59)$,

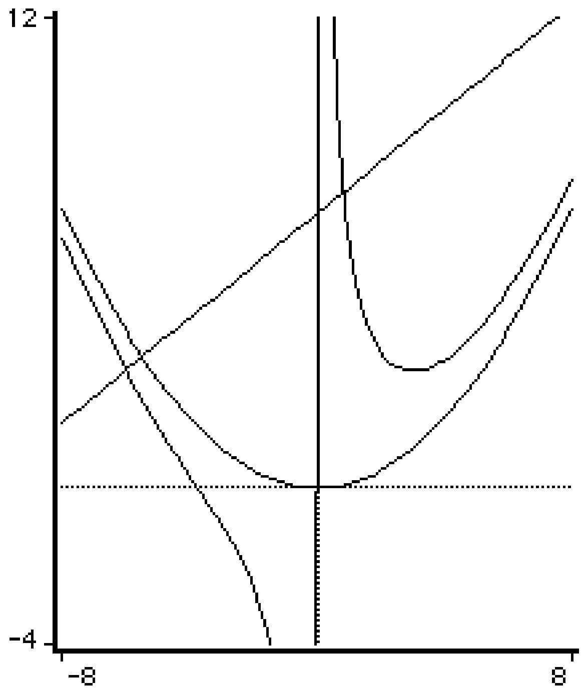
$P_4(-1|-53/9)$

c) $f(-6) = 3 \Longrightarrow P(-6|3)$

$f'(-6) = -3/2 \Longrightarrow m_n = 2/3$

n: $y = 2/3 \cdot x + 7$

$n \cap k$: $x^3 - 6x^2 - 63x + 54 = 0 = (x + 6)(x^2 - 12x + 9) \Longrightarrow$ **$x_{12} = 6 \pm 3\sqrt{3}$**



24. $f'(x) = (x^4-1)/x^3$; $f''(x) = 3(3x^4+1)/x^4$

1. Pol bei $x_1 = 0$; Symm. bez. y-Achse

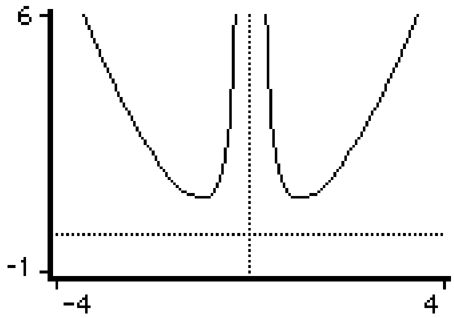
2. N: keine; $\mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

3. $f'(x) = 0 \Rightarrow x_{23} = \pm 1$, $f''(\pm 1)>0 \Rightarrow T_{12}(\pm 1|1)$

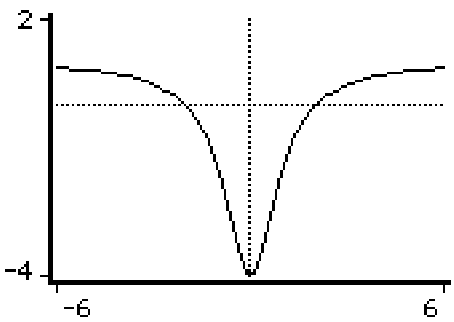
4. $f''(x) = 0$ hat keine L. => keine WP

5. vert As: $x = 0$

$f(x) = 0.5x^2 + 1/(2x^2) \Rightarrow A(x) = 0.5x^2$

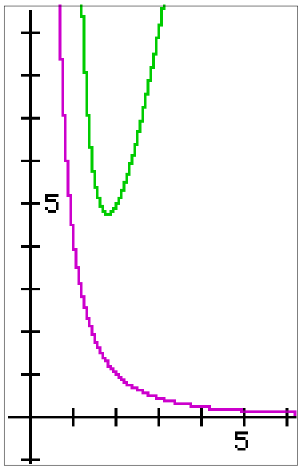


25. $f(x) = 10x/(x^2+1)^2$; $f''(x) = (-30x^2+10)/(x^2+1)^3$



27. $V = 1 = \pi r^2h + 2/3 \cdot \pi r^3 \Rightarrow h = (3 - 2\pi r^3)/3\pi r^2$ (*)
$O = \pi r^2 + 2\pi rh + 2\pi r^2 = 3\pi r^2 + 2\pi rh = 3\pi r^2 + 2/r - 4\pi r^2/3 = 5\pi r^2/3 + 2/r = O(r)$
$O'(r) = 10\pi r/3 - 2/r^2 = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{3/5\pi} = 0.567$; O80) = $O(\infty) = \infty$, O stetig und positiv in $\mathbb{R}+$ => Min für **r = 0.567 [dm]**
r maximal => h = 0; (*) => $\mathbf{r_{max} = \sqrt[3]{3/2\pi} = 0.782}$ **[dm]**

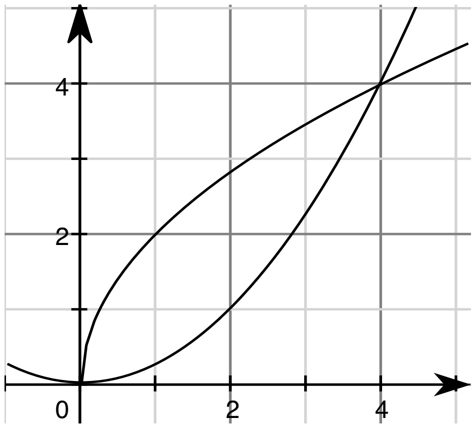
28. a) $d^2(x) = x^2 + 16/x^4$;
$d^{2\prime}(x) = 2x - 64x^{-5} = 0 \Rightarrow x^6 = 32 \Rightarrow x = 2^{5/6}$
Skizze => $\mathbf{P(2^{5/6} \mid 2^{7/6}) = P(1.78 \mid 2.24)}$



b) $F = {}_1\int^k y\,dx = [-4x^{-1}]_1^k = \mathbf{-4/k + 4}$

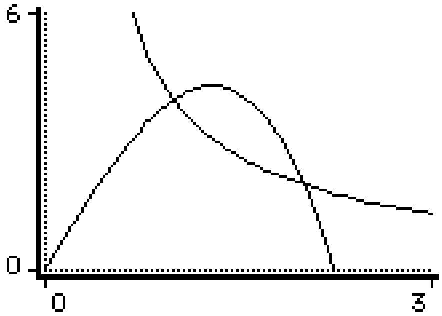
c) $F(100) = 4 - 4/100 = \mathbf{3.96}$
$\mathbf{F(\infty) = 4}$

29. a) k_2: $y = 2\sqrt{x}$; $F = 2{}_0\int^4(x - x^2/4)dx =$
$\mathbf{16/3 = 5.333} = {}_0\int^4(2x^{0,5} - x^2/4)dx$



b) in P(4|4): $y'_1(x) = x/2$; $y'_2(x) = x^{-0,5}$;
$m_1 = y'_1(4) = 2$; $m_2 = y'_2(4) = 0.5$
$\Rightarrow \tan\varphi = |(m_1 - m_2)/(1+m_1 \cdot m_2)| =$
$1.5/2 = 3/4 \Rightarrow \mathbf{\varphi = 36.87°}$
in O: $\mathbf{\varphi = 90°}$.
c) Bed. für P: $m_{12} = 1 \Rightarrow P_1(2|1)$; $P_2(2|1)$
$\Rightarrow \mathbf{a = \sqrt{2}}$
d) $V = \pi_0\int^4 x_1^2dy - \pi_0\int^4 x_2^2dy =$
$\pi_0\int^4 (4y - y^4/16)dy = \pi[2y^2 - y^5/80]_0^4$
$= \mathbf{96\pi/5 = 19.2\pi = 60.32} = \pi_0\int^4 ((2\sqrt{x})^2 - (x^2/4)^2)\,dx$
e) $V = \pi_0\int^4 x_2^2dy = \pi_0\int^4 y^4/16dy = \pi[y^5/80]_0^4 = \mathbf{64\pi/5 = 12{,}8\pi = 40.21}$

30. $4/x = 5x - x^3 \Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0$
$V = \pi_1\int^2(y_2^2 - y_1^2)dx$
$= \pi_1\int^2(25x^2 - 10x^4 + x^6 - 16/x^2)dx$
$= \pi[25x^3/3 - 2x^5 + x^7/7 + 16/x]_1^2$
$= \pi[200/3 - 64 + 128/7 + 8$
$- (25/3 - 2 + 1/7 + 16]$
$= \pi[-70 + 175/3 + 127/7]$
$= \mathbf{136\pi/21} = 6.48 \cdot \pi = \mathbf{20.34}$



31. a) $x^2/32 + c = \sqrt{x}$ und

$x/16 = 1/(2\sqrt{x})$

II ==> $x^{3/2} = 8$ => $x = 4$

I => $\mathbf{c = 3/2}$

=> $\mathbf{k_3\!: y = x^2/32 + 3/2}$

b) $F = \int_0^4 (k_3 - k_2)dx$

$= [x^3/96 + 3x/2 - 2x^{3/2}/3]_0^4$

$= 2/3 + 6 - 16/3 = \mathbf{4/3}$

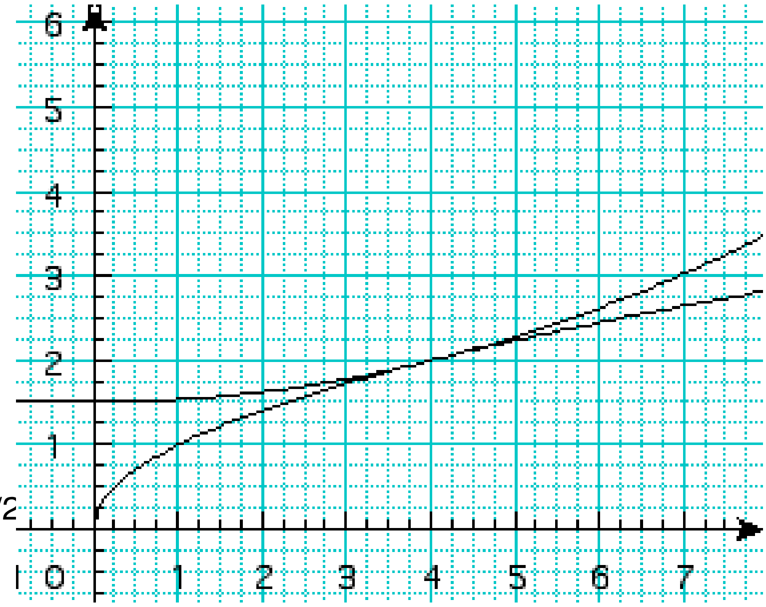
c) $V/\pi = \int_0^4 (k_3^2 - k_2^2)dx$

$= [x^4/32^2 + 3x^2/32 + 9/4 - x]_0^4$

$= x^5/(5\cdot 32^2) + x^3/32 + 9x/4 - x^2/2$

$= 1/5 + 2 + 9 - 8 = 3.2$

=> $V = \mathbf{16\pi/5 = 10.053}$



c) Bestimme das Volumen des Körpers, der durch Rotation der in b) beschriebenen Fläche um die x-Achse entsteht.

==> Falls a) nicht gelöst wurde: Setze für die verschobene Kurve k_3: $y = x^2 / 32 + c$ und für den Berührpunkt von k_2 und k_3 B(4|2).

32. Turm umlegen => $y = ax^2 + 5$; $10 = a\cdot 20^2 + 5$ => $a = 1/80$

=> $y = 1/80 \cdot x^2 + 5$

$V = 2\pi \int_0^{20} y\,dx = 2\pi \int_0^{20} (x^4/6400 + x^2/8 + 25)dx$

$= 2\pi[x^5/32000 + x^3/24 + 25x]_0^{20} = \mathbf{5600\pi/3 = 5864.3\ [m^3]}$

33. $O = 2\pi r^2 + 2\pi rh$; $(h/2)^2 = 1 - r^2$

$O(r) = 2\pi(r^2 + 2r\sqrt{1-r^2})$

$O'(r) = 2\pi(2r + 2\sqrt{1-r^2}$

$- 2r^2/\sqrt{1-r^2}) = 0$

$\Rightarrow 2r\sqrt{1-r^2} + 2(1 - r^2) - 2r^2$

$= 0$

$\Rightarrow r\sqrt{1-r^2} = 2r^2 - 1$ | quadr.

$\Rightarrow 5r^4 - 5r^2 + 1 = 0$

$\Rightarrow r_{12}{}^2 = 0.5 \pm \sqrt{5}/10$

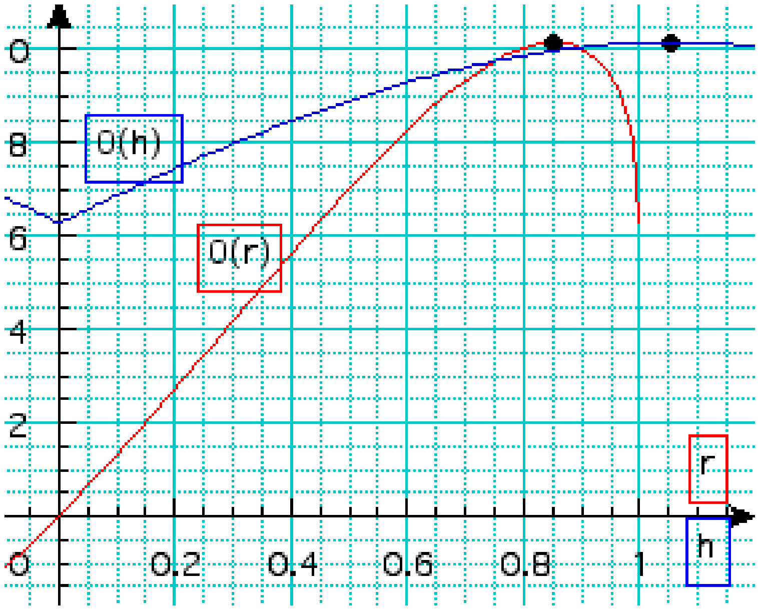
Probe $\Rightarrow r^2 = 0.5 + \sqrt{5}/10$

$= 0.72361 \Rightarrow$ **$r = 0.85065$**

$O(0) = 0$; $O(1) = 2\pi$;

$O(r)$ stetig und >0 in [0,1

] ==> Max.



oder $r^2 = 1-h^2/4 \Rightarrow O(h) = \pi/2(4-h^2 + 2\sqrt{4h^2-h^4})$, $O'(h) = -2h+(8h-4h^3)/\sqrt{4h^2-h^4}=0$

$\Rightarrow -2h\sqrt{4h^2-h^4} + 8h - 4h^3 = 0 \Rightarrow 4h^2 - h^4 = 4h^4 - 16h^2 + 16$

$\Rightarrow 5h^4 - 20h^2 + 16 = 0 \Rightarrow h^2{}_{12} = (20 \pm 4\sqrt{5})/10 = 2 \pm 2\sqrt{5}/5$. $h_1 = 1.70..$, **$h_2 = 1.05146$**

$\Rightarrow r^2 = 0.72361$ etc

34. $k_1 \cap k_2$: $x^2 - 4x + 4 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow S(0 \mid 2)$

$y_1'(x) = x - 2; y_1'(o) = -2 \Rightarrow \alpha = 63.43°$

$\Rightarrow 2\alpha = 126.9°$; $b = 180° - 2\alpha =$ **53.1°**

oder: $m_1 = -2$; $m_2 = 2$; $\tan\varphi = 4/3 \Rightarrow \varphi =$ **53.1°**

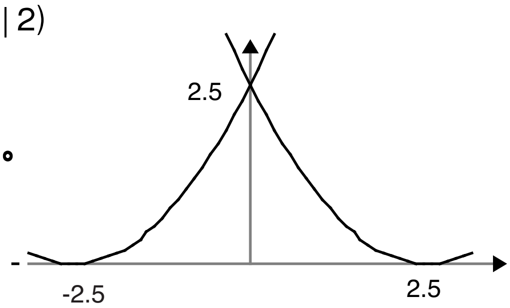
b) $F = 2\cdot{}_0\int^2 y_1(x)dx = [x^3/3 - 2x^2 + 4x]_0{}^2 =$ **8/3**

c) $F(x) = 2x\cdot(x - 2)^2/2 = x(x - 2)^2$

$F'(x) = (x - 2)(3x - 2) = 3x^2 - 8x + 4$

$F'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 2$; $x_2 = 2/3$; Max bei x_2 klar

$F(3/2) =$ **$32/27 = 1.1852$; $C(2/3 \mid 8/9)$**



35. $F = x^2 + 4\cdot 0.5xh$ mit $h^2 = a^2 - x^2/4$

$\Rightarrow F(x) = x^2 + x\cdot\sqrt{4a^2 - x^2};$

$= x^2 + \sqrt{4a^2x^2 - x^4};\ 0 \leqslant x \leqslant 2a$

$F'(x) = 2x + 0.5(4a^2x^2 - x^4)^{-0,5}\cdot(8a^2x - 4x^3) = 0$

$\Rightarrow 2x\cdot\sqrt{4a^2x^2 - x^4} + 4a^2x - 2x^3 = 0 \quad |:2x \quad (*)$

$\Rightarrow x_1 = 0;\ 4a^2x^2 - x^4 = (x^2 - 2a^2)^2 = x^4 - 4a^2x^2 + 4a^4$

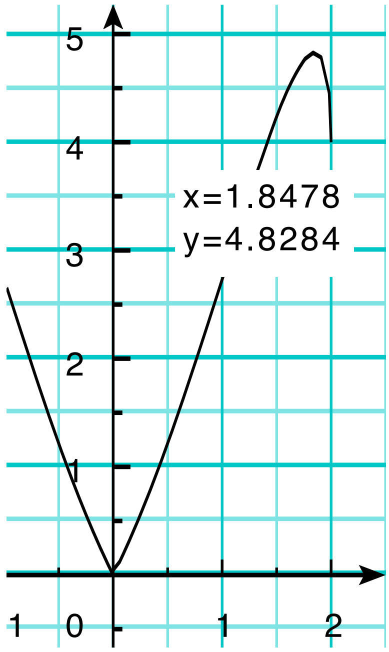
$\Rightarrow 2x^4 - 8a^2x^2 + 4a^4 = 0$

$x^2_{12} = 2a^2(1 \pm \sqrt{2})$

$\Rightarrow$ $\mathbf{x_1 = a\sqrt{2 + \sqrt{2}} = 1.8478a}$

$(x_2 = 0.7653$ keine L. von Gl $(*))$

$\mathbf{F(x_1) = 2a^2(1 + \sqrt{2}) = 4.8284a^2}$



36. $y' = (x^3-2)/x^3;\ y'' = 6/x^4$

1. Pol bei $x_1 = 0$,

keine Symm.

2. $N(-1|0)$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

3. E: $x_2 = \sqrt[3]{2}$, $y''(x_2) > 0$

$\Rightarrow T(\sqrt[3]{2} \,|\, 3/\sqrt[3]{4})$

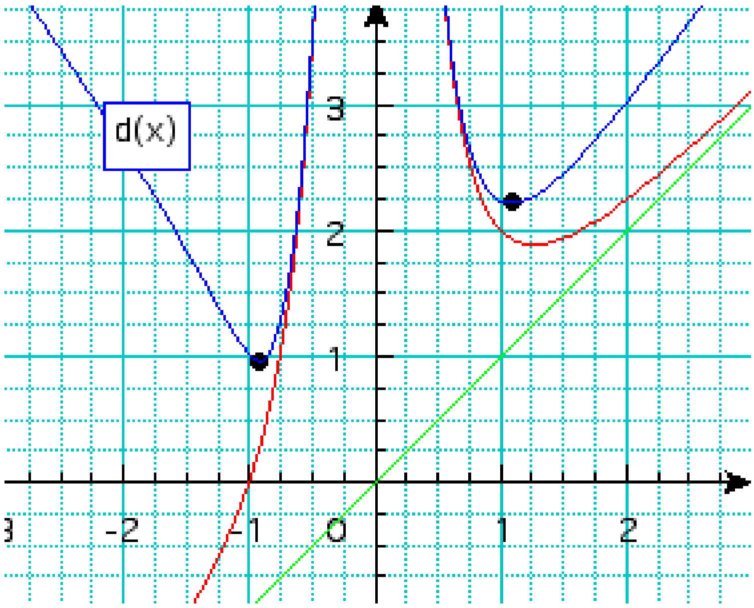
$= T(1.26 \,|\, 1.89)$

4. WP: keine

5.vert. As: $x = 0$,

schiefe. $A(x) = x$

$x \uparrow\downarrow 0 \to f(x)\ +\infty$



b)

$d^2(x) = x^2 + (f(x))^2$

$= (x^6 + x^6 + 2x^3 + 1)/x^4 = (2x^6 + 2x^3 + 1)/x^4$

$d^{2\prime}(x) = (4x^6 - 2x^3 - 4)/x^5 = 0 \Rightarrow 4x^6 - 2x^3 - 4 = 0$

$x^3_{12} = (1 \pm\sqrt{17})/4 \Longrightarrow$ $\mathbf{x_1 = 1.0860;\ x_2 = -0.92082}$

$\Longrightarrow$ offensichtlich: $\mathbf{x_2}$ $(d(x_1) = 2.218,\ d(x_2) = 0.9564)$

37. a) $\mathbf{-5/3 \cdot x^{4/15} + C}$ b) $\mathbf{y' = (\sin x + x\cdot\cos x)/2\sqrt{x\cdot\sin x}}$

c) $\sqrt{2}x^3/9 - 2x/3 - 11/(3x) + C = \mathbf{(\sqrt{2}x^4 - 6x^2 - 33)/(9x) + C}$

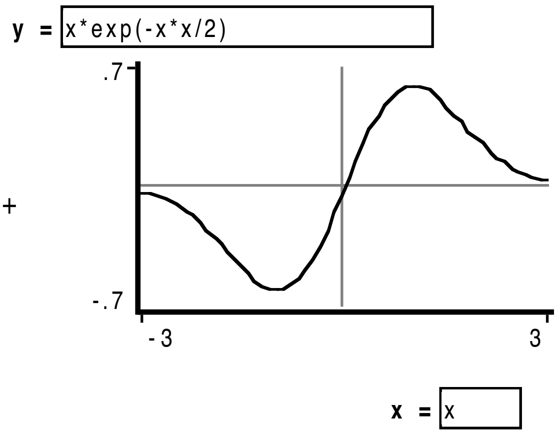
d) $2(3 - 2t)^{-1}]_2^x = 2/(3-2x) + 2 = 32/17 \Longrightarrow$ $\mathbf{x = 10}$

38. $F'(x) = k \cdot (g(x))^{k-1} \cdot g'(x)$

40. a) $_{-5}\int^0 e^x dx = 1 - e^{-5} = 0.9933$ b) $= 1 - e^k$ c) $\lim F(k) = 1$

d) $\pi\cdot{}_{-5}\int^0 e^{2x}dx = 0.5\pi(1 - e^{-10}) = 1.5707$ b) $= 0.5\pi(1 - e^{2k)}$ c) $\lim F(k) = 0.5\pi$

41. a)



1. **symm. bez O**
2. **N(0|0), kein Pol**

3.$f'(x) = (1-x^2)\exp(..)$; $f''(x) = (x^3-3x)\exp(..)$

$x_{12} = \pm 1$; f´wechselt bei $x_1 = 1$ von - auf +

==> **$H(1|1/\sqrt{e}) = H(1|0.607)$;**

$T(-1|-0.607)$

3. $f'' = 0$ ==> $x_3 = 0$, $x_{45} = \pm\sqrt{3}$, f´´ w. Zeichen

==> $W_1 = N$; **$W_{23}(\pm\sqrt{3}|\pm\sqrt{3}\cdot\exp(-3/2)$ =**

$W_{12}(\pm 1{,}73|\pm 0.386)$

4. **f—>0 für x—>±∞; As: y = 0**

b) $F'(x) = A(-x)\cdot\exp(..)$ ==> $A = -1$ ==> $F(x) = -\exp(..)$

$I(k) = F(k)-F(0) =$ **$1-\exp(-k^2/2)$**

$\lim I(k) = 1$

c) $1 - \exp(-c^2/2) = 0.5$ ==> $\exp(..) = 0.5$ ==> $-c^2/2 = \ln(0.5)$ ==>

$c = +\sqrt{-2\ln(0.5)} = 1.18$

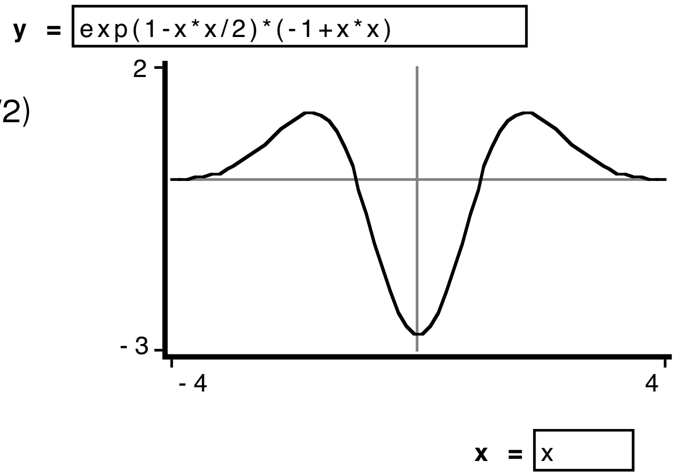
Berechne auch die "Grenzfläche" $G = \lim\limits_{k \to \infty} G(k)$.

(Tip: Eine Stammfunktion von f hat die Form $F(x) = A\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + B$)

42. $f'(x) = (3x-x^3)\exp(1-x^2/2)$;

$f''(x) = (3-6x^2+x^4)\exp(1-x^2/2)$

$f'''(x) = (-x^4 + 10x^2 - 15)\exp(1-x^2/2)$



1. **Symm. bez. y-Achse,**
   $N_{12}(\pm 1|0)$
   $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, keine Pole
2. $f' = 0 \Longrightarrow x_1 = 0$, $x_{23} = \pm\sqrt{3}$
   $f''(0) = 3\cdot e > 0$, $\Longrightarrow$ **$T(0|-e)$,**
   $f''(x_{23}) = -6\cdot\exp(-1/2) < 0 \Longrightarrow$
   $H_{12}(\pm\sqrt{3}|2/\sqrt{e})$
   $= H_{12}(1.73|1.21)$
3. $f''=0 \Longrightarrow x^2 = 3\pm\sqrt{6}$
   $\Longrightarrow = \pm\sqrt{x^2}$
   f''wechselt Zeichen bei x_4 .. x_7 (4 einfache Nullstellen von f'')
   $f'''(x_{4567}) = \pm 4.076$ resp. ± 15.006
   $\Longrightarrow$ **$W_{12}(\pm 2.33|0.793)$; $W_{34}(\pm 0.742|-0.928)$**
4. $f(x) \longrightarrow 0$ für $x \longrightarrow \pm\infty$; **As: $y = 0$**

b) $F'(x) = A\cdot\exp() + Ax(-x)\cdot\exp()$
   $= A\cdot\exp(1 - x^2) \Longrightarrow$ **$A = -1$; B bel.**, $F(x) = -x\cdot\exp()$

c) $I(k) = F(k) - F(1) =$ **$-k\cdot\exp(1-k^2/2) + \sqrt{e}$;** $\lim I(k) = \sqrt{e}$

43. $f'(x) = (2-\ln(x^2))/x^2$

$f''(x) = 2(\ln(x^2)-3)/x^3$

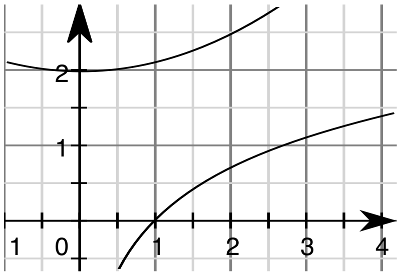
1. $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$; Pol bei $x = 0$
   $N_{12}(\pm 1 \mid 0)$
   symm. bez O
2. $f'=0 \Rightarrow x = \pm e$, f' wechselt bei $+e$ von $+$ auf $-$
   $\Rightarrow H(e|2/e); T(-e|-2/e)$
3. $f''= 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{e^3}$ mit Zeichenwechsel $\Rightarrow W_{12}(\pm\sqrt{e^3} \mid \pm 3/\sqrt{e^3})$
4. $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x)) = 0$, $\lim_{x\downarrow 0} (f(x)) = -\infty$; $\lim_{x\uparrow 0} (f(x)) = +\infty$

44. a) $y' =$ **$e^{-x}(2x - x^2)$** b) $y' =$ **$(12x - 3)/(2x^2 - x)$**

c) $y' =$ **$3^{3x^3+3} \cdot 9\cdot\ln(3)\cdot x^2$** d) $y' =$ **$2x\cdot\log_2(2x) + x/\ln(2)$**

45. $I = [e^x + 5\ln(x)]^2_1 =$ **$e^2 + 5\ln(2) - e = 8.137$**

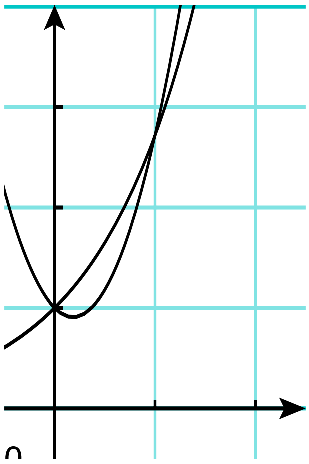
46. $s(a) = 2+a^2/8 - \ln(a)$,
$s'(a) = a/4 - 1/a = 0$
=> $a = \pm 2$; Skizze
=> Min. bei $\mathbf{a = 2}$



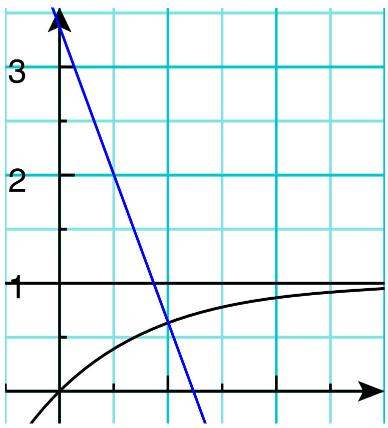
47. $2x-1 = x+3$ => $\mathbf{S(\ 4 \mid \ln(7)\ )}$;
$y'_1 = 2/(2x-1)$, $m_1 = 2/7$; $y'_2 = 1/(x+3)$; $m_2 = 1/7$; $\tan\varphi = 7/51$ => $\boldsymbol{\varphi = 7.815°}$

48. a) $y' = \mathbf{e^x(e \cdot x^{e-1} + x^e)}$
b) $y = \exp(\ln(3) \cdot (4x^5 + 6))$;
$y' = \exp(\ln(3) \cdot (4x^5 + 6)) \cdot 20 \cdot \ln(3) \cdot x^4 = \mathbf{20 \cdot \ln(3) \cdot x^4 \cdot y}$
c) $y' = 3x^2 \cdot \log_4(5x^6) + x^3 \cdot 30x^5/(5x^6 \cdot \ln 4) = \mathbf{3x^2(\log_4(5x^6) + 2/\ln 4)}$

49. p: $f(x) = ax^2 + bx + 1$;
$x = 1$: $f(1) = a + b + 1 = e$;
$k'(0) = 1$ => $f'(0) = b = -1$ => $a = e$
P: $y = ex^2 - x + 1$
$F = {}_0\int^1 (e^x - ex^2 + x - 1)dx$
$= [e^x - ex^3/3 + x^2/2 - x]_0^1 = \mathbf{0.3122}$



50. $f(x) = 1-e^{-x}$ => $\mathbf{a(x) = 1}$
$\mathbf{F(k)} = \int_0^k(1-(1-e^{-x})dx = \int_0^k e^{-x}\,dx$
$= [-e^{-x}]_0^k = -e^{-k} - (-1) = \mathbf{1 - e^{-k}}$
$\mathbf{\lim F(k) = 1}$
$P(1|1-e^{-1})$, $m_t = e^{-1}$, $m_n = -e = (y - (1 - e^{-1})/(x - 1)$
=> n: $y = -ex + e + 1 - e^{-1}$
=> $\mathbf{S(\ 0 \mid e + 1 - e^{-1}) = S(\ 0 \mid 3.350)}$



52. p: $y = -ax^2 + b$; $a > 0$; $P \in p$: $1 = -a/4 + b$ ==> $-a = 4(1 - b)$

==> p: $y = 4(1 - b)x^2 + b$

==> $x^2 = (y - b)/4(1 - b)$

$V(b) = \pi\int x^2 dy = \pi/4(1-b)\cdot\int(y-b)dy$

$= \pi/4(1-b)\cdot[y^2/2 - by]_0^b$ ==> $V(b) = \pi b^2/8(b-1)$

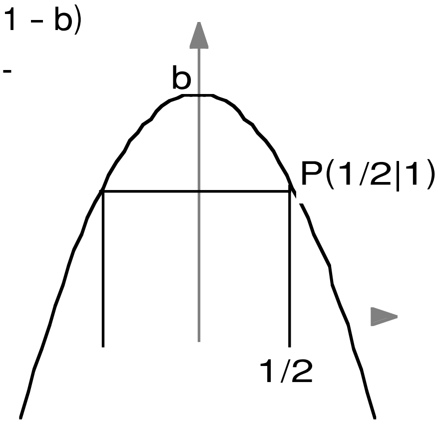
$V'(b) = \pi/8\cdot(2b(b-1)-b^2)/(b-1)^2$

$= \pi/8\cdot b(b-2)/(b-1)^2 = 0$

==> $(b_1 = 0)$; $b_2 = 2$;

V' wechselt bei b_2 von - auf +

==> **Minimum bei H = b = 2**



Rot. um x-Achse: $P(1|0{,}5)$; $y = \sqrt{(x-b)/4(1-b)}$; $V(b) = \pi\int y^2 dx$; Rest wie oben

oder:

$b = (4+a)/4$; $y = -ax^2 + (4+a)4$; $x^2 = (4+a-4y)/4a$; $V = \pi/4a\int(4+a-4y)dy =$

$..=\pi/32a\cdot(16+8a+a^2)$; $V' = (8+2a)a-(16+8a+a^2)7a^2 = 0$ ==> $a^2 = 16$ etc

53. a) gem. Punkt: $\sin x = k + \cos x$; Grenzfall: Berühren: $\cos x = -\sin x$

==> $\tan x = -1$ ==> $x = 3\pi/4; 7\pi/4$ ==> $k = \sin x - \cos x = \pm\sqrt{2}$ ==> $\mathbf{-\sqrt{2} \leqslant k \leqslant \sqrt{2}}$

oder: $s = k + c$ ==> $2c^2 + 2kc + (k^2-1) = 0$; $D \geqslant 0$ ==> $8-4k^2 \geqslant 0$ etc.

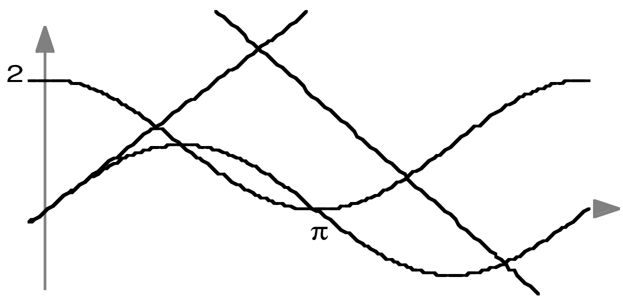
b) $s = c + 1$ ==> $s - 1 = \sqrt{1-s^2}$

==> $2s(s-1) = 0$; $s_1 = 0$ ==> $x_1 = 0$;

$\mathbf{x_2 = \pi}$; $x_3 = 2\pi$;$s_2 = 1$ ==> $\mathbf{x_4 = \pi/2}$

==> $\mathbf{S_1(\pi/2|1)}$; $\mathbf{S_2(\pi|0)}$

(oder $2c^2 + 2c = 0$ etc)



$\sphericalangle$ in S_1: $m_1 = o$; $m_2 = -\sin\pi/2 = -1$

==> $\tan\varphi = 1$ ==> $\boldsymbol{\varphi = 45°}$ (ebenso in S_2)

Tangente t in O an c_1: t: $y = x$;

Normale n in $\mathbf{Q(4\pi/3|1/2)}$ auf c_2:

$m_t = -\sin(4\pi/3) = \sqrt{3}/2$ ==> $m_n = -2/\sqrt{3} = (y - 1/2)/(x - 4\pi/3)$

==> **n:** $\mathbf{y = -2/\sqrt{3} \cdot x + 8\pi/3\sqrt{3} + 1/2}$ $= -1{,}155x + 5.337$

$t \cap n$: $x(1 + 2/\sqrt{3}) = (16\pi+3\sqrt{3})/6\sqrt{3}$ ==> $x = (16\pi+3\sqrt{3})\sqrt{3}/(6\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)) = 2{,}4786$

==> $\mathbf{S_3(2{,}48|2{,}48)}$

c) $V = \pi\int s^2 dx - \pi\int(1+c)^2 dx = \pi\int(2s^2 - 2c - 2)dx = \pi[x - sc - 2s - 2x]_{\pi/2}^{\pi}$

$= \pi[\pi - 2\pi - (\pi/2 - 2 - \pi)] = \mathbf{\pi[2 - \pi/2] = 1{,}35}$

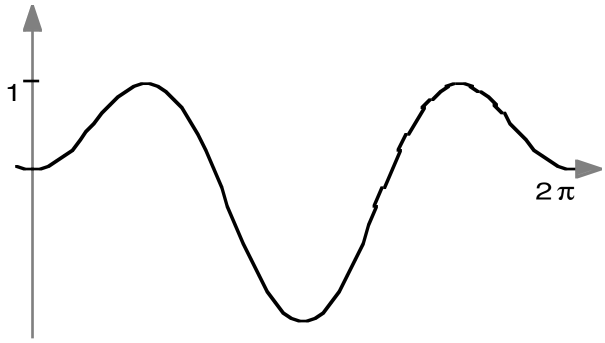
56. $y' = -\sin x + 2\sin 2x$; $y'' = -\cos x + 4\cos 2x$; $y''' = \sin x - 8\sin 2x$

1. k.Symm. ers.; 2π-periodisch

2. Nullst: $\cos x = \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\Longrightarrow 2c^2 - c - 1 = 0$; $c_{12} = (1 \pm 3)/4$

$\Longrightarrow$ **$N_{1,2,3,4}(0,\ 2\pi/3 = 2.09,\ 4\pi/3 = 4.19,\ 2\pi|0)$**



3. $\sin x - 4\sin x\cdot\cos x = 0$

$\Longrightarrow \sin x(1 - 4\cos x) = 0$;

$x = 0$; π ; 2π ; 1,318 ; 4,965

$\Longrightarrow$ **$T_1(o|0)$; $T_2(2\pi|0)$; $T_3(\pi|-2)$; $H_1(1{,}318|1{,}125)$; $H_2(4{,}965|1{,}125)$**

4. $-\cos x + 4(2\cos^2 x - 1) = 0 \Longrightarrow$

$8c^2 - c - 4 = 0$; $c_{12} = (1 \pm \sqrt{129})/16 \Longrightarrow x = 0{,}6882;\ 5{,}595;\ 2{,}275;\ 4{,}008$

$\Longrightarrow$ **$W_{1,2}(0{,}6882;\ 5{,}595 \mid 0{,}580)$; $W_{3,4}(2{,}275\ ;\ 4{,}008 \mid -0{,}406)$**

57. a) $y' = \sin x\cdot\cos x + x(\cos^2 x - \sin^2 x) =$ **$0.5\cdot\sin(2x) + 2x\cdot\cos(2x)$**

b) $y' = 2\cdot\ln(3x^4-5) + 2x\cdot 12x^3/(3x^4-5)$

$=$ **$(2(3x^4-5)\cdot\ln(3x^4-5) + 24x^4)/(3x^4-5)$**

c) $y' = 1/(2\sqrt{x})\cdot\sin^2(2x) + \sqrt{x}\cdot 2\sin(2x)\cdot\cos(2x)\cdot 2$

$=$ **$1/(2\sqrt{x})\cdot(\sin^2(2x) + 8x\cdot\sin(2x)\cdot\cos(2x))$**

d) $y' =$ **$-10x/(3\cdot\sqrt[3]{(16 - 5x^2)^2})$**

58. a) **$-2\cos(x/2)$** b) **$2x - \sin(2x)$**

c) $5/7\cdot[\ln(2e) - \ln(e^{-1})] =$ **$5/7\cdot[\ln(2)+2] = 1.9236$**

d) $-\cot(\pi/3) + \cot(4/\pi) = -0.57735 + 0.30661 =$ **-0.27069**

59. a) $F = \int(\pi/4 \text{ bis } 5\pi/4)\ (\sin x - \cos x)dx = [-\cos x - \sin x] =$ **$2\sqrt{2} = 2.83$**

b) $1/\sqrt{2} = \sin a - \cos a$ (*) $= \sin a - \sqrt{1 - \sin^2 a}$

$\Rightarrow 4\sqrt{2}s^2 - 4s - \sqrt{2} = 0$; $s_{12} = (1 \pm \sqrt{3})/2\sqrt{2}$

$s_1 = 0.9659 \Rightarrow$ **$a_1 = 1.31$**; $s_2 = -0.259 \Rightarrow$ **$a_2 = 3.403$** $= 2\pi/3 - a_1$

einfacher: (*) $\Rightarrow 1/2 = \sin^2 a - 2\sin a\cdot\cos a + \cos^2 a = 1 - \sin 2a$

$\Rightarrow 2a = \pi/6,\ 5\pi/6,\ 13\pi/6,\ 17\pi/6 \Rightarrow$ **$a_1 = 5\pi/12$; $a_2 = 13\pi/12$**

c) $m_{\sin} = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$; $m_{\cos} = -\sin(\pi/4) = -\sqrt{2}/2$

$\Rightarrow \tan\varphi = 2\sqrt{2} \Rightarrow$ **$\varphi = 70.5° = 1.23$**

60. a) $\mathbf{y' = \cos^2x - \sin^2x}$ oder: $y = 0{,}5\sin2x$; $\mathbf{y' = \cos2x}$

b) $\mathbf{y' = (\sin x + x\cdot\cos x)/2\sqrt{x\cdot\sin x}}$

c) $\mathbf{y'} = (2x\cdot\tan2x - x^2\cdot2/\cos x)/\tan^2 2x$

$= (2x\cdot\sin2x/\cos2x - 2x\cdot1/\cos2x)/(\sin^2 2x/\cos^2 2x)$

$= (2x\cdot\sin2x \cdot \cos2x - 2x^2)/\sin^2 2x = \mathbf{(x\cdot\sin4x - 2x^2)/\sin^2 2x}$

61. a) $[0{,}5\sin2x]_0^{\pi/4} = 0{,}5\sin\pi/2 = \mathbf{0{,}5}$

b) $\mathbf{I(x)} = [\tan u]_{3\pi/4}^{x} = \tan x - \tan(3\pi/4) = \mathbf{\tan x + 1}$

c) $\mathbf{2x + \cos2x + C}$

62. $f'(x) = -a\cdot\sin x + b\cdot\cos x$;

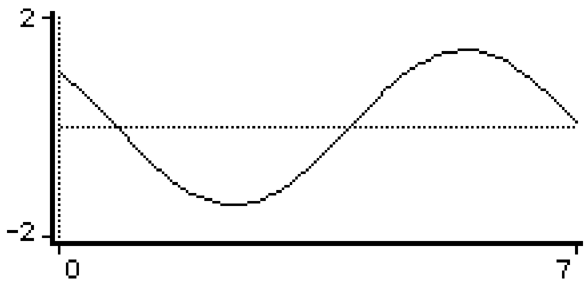
$f(\pi/4) = 0 = a\cdot\sqrt{2}/2 + b\cdot\sqrt{2}/2 \Longrightarrow a = -b$

$f'(5\pi/6) = 0.5(\sqrt{3} - 1) = -0.5a + \sqrt{3}\cdot b/2$

$\Longrightarrow$ $\mathbf{b = -1;\ a = 1}$

$f'(\pi/4) = -\sin(\pi/4) - \cos(\pi/4)$

$= -\sqrt{2} = \tan\varphi \Rightarrow$ $\mathbf{\varphi = 125{,}3°\ (54{,}7°)}$



63. a) SP: $\tan x = 1 \Rightarrow x = \pi/4, 5\pi/4$;

$F = \int(\sin x - \cos x)dx = \mathbf{2\sqrt{2}}$

b) $P(a|\sin a)$, $Q(a|\cos a)$

$\overline{PQ} = \sin a - \cos a = 1/\sqrt{2}$ |quadr

$\Rightarrow 2\sin a\cdot\cos a = \sin2a = 0.5$

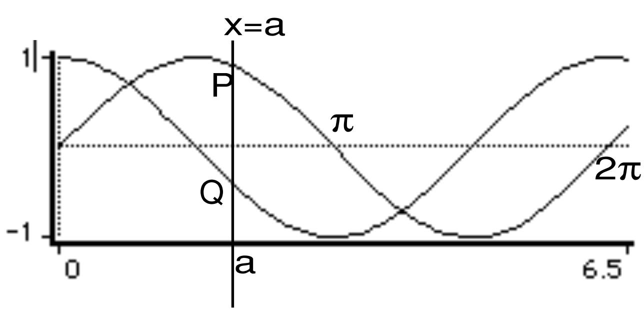
$\Rightarrow \mathbf{a_1 = 5\pi/12;\ a_2 = 13\pi/12}$

(75°; 195°)

c) $V_1 = \pi\cdot\int\sin^2x dx\ [\pi/4;\pi] = 3\pi^2/8 + \pi/4 = 2.019$

$V_2 = \pi\cdot\int\cos^2x dx\ [\pi/4; \pi/2] = \pi^2/8 - \pi/^4 = 0.448$

$\Longrightarrow V = V_1 - V_2 = \mathbf{\pi^2/4 + \pi/2 = 4.038}$



64. a) $M = \pi Rs$; $\cos\varphi = 1/R \Rightarrow R = 1/\cos\varphi$;

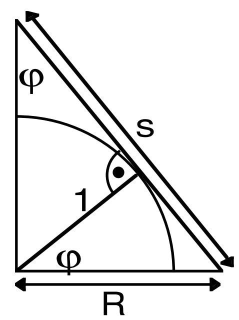
$\sin\varphi = R/s \Rightarrow s = R/\sin\varphi = 1/(\sin\varphi\cdot\cos\varphi)$

$\Rightarrow$ $\mathbf{M(\varphi) = \pi/(\sin\varphi\cdot\cos^2\varphi)}$

b) $M'(\varphi) = -\pi(\cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi)/(\sin^2\varphi\cdot\cos^3\varphi) = 0$

$\Rightarrow \sin^2\varphi/\cos^2\varphi = \tan^2\varphi = 1/2$

$\Rightarrow \tan\varphi = +1/\sqrt{2}$; $\mathbf{\varphi = 35.3°;\ M_{min} = 8.16}$



65. $y' = -\sin x + 2\sin 2x$;

2. Nullst: $\cos x = \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ ==> $2c^2 - c - 1 = 0$; $c_{12} = (1\pm 3)/4$

==> $\mathbf{N_{1,2,3,4}(0,\ 2\pi/3=2.09,\ 4\pi/3=4.19,\ 2\pi|0)}$

3. $\sin x - 4\sin x\cdot\cos x = 0$ ==> $\sin x(1 - 4\cos x) = 0$; $x = 0$; π ; 2π ; 1,318 ; 4,965

==> $\mathbf{T_1(o|0);\ T_2(2\pi|0);\ T_3(\pi|-2);\ H_1(1{,}318|1{,}125);\ H_2(4{,}965|1{,}125)}$

66. a) $F = \int(\pi/4$ bis $5\pi/4)\ (\sin x - \cos x)dx = [-\cos x - \sin x] = \mathbf{2\sqrt{2} = 2.83}$

b) $1/2 = \sin a - \cos a$ (*) $= \sin a - \sqrt{1 - \sin^2 a}$

=> $2\cdot\sqrt{1 - \sin^2 a} = 2s - 1$ => $8s^2 - 4s - 3 = 0$

$s_1 = 0.91143$ => $\mathbf{a_1 = 1.147}$ (a = 1.9948 ist Sch.L.);

$s_2 = -0.41143$ => $\mathbf{a_2 = 3.566}$ $= 2\pi/3 - a_1$ (a = 5.859 ist Sch.L.)

oder: (*) => $1/2 = \sin^2 a - 2\sin a\cdot\cos a + \cos^2 a = 1 - \sin 2a$

=> $\sin 2a = 0.75$ etc.

c) $m_{\sin} = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$; $m_{\cos} = -\sin(\pi/4) = -\sqrt{2}/2$

=> $\tan\varphi = 2\sqrt{2}$ => $\mathbf{\varphi = 70.5° = 1.23}$

67. a) L: $\mathbf{\sin^2 x}$; R: $0.5\cdot(1 - \cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)) = 0.5\cdot(1 - (1-s^2) + s^2) = \mathbf{s^2}$

b) $\mathbf{-\cos(2x+2) + C}$

c) $[3\sin(x/3)]_{,,}^{,,} = 0 - 3\cdot 1 = \mathbf{-3}$

68. a) $M = \pi Rs$; $\cos\varphi = 1/R$ => $R = 1/\cos\varphi$;

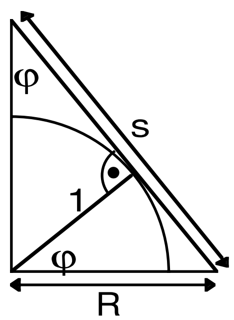
$\sin\varphi = R/s$ => $s = R/\sin\varphi = 1/(\sin\varphi\cdot\cos\varphi)$

=> $\mathbf{M(\varphi) = \pi/(\sin\varphi\cdot\cos^2\varphi)}$

b) $M'(\varphi) = -\pi(\cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi)/(\sin^2\varphi\cdot\cos^3\varphi) = 0$

=> $\sin^2\varphi/\cos^2\varphi = \tan^2\varphi = 1/2$

=> $\tan\varphi = +1/\sqrt{2}$; $\mathbf{\varphi = 35.3°;\ M_{min} = 8.16}$



69. g: $y = r/h^*x$, $V = \pi\int(0$ bis $h)r^2x^2/h^2dx = \pi r^2/h^{2*}x^3/3$ (0 bis h $= \pi r^2/h^{2*}h^3/3$

$= \mathbf{\pi r^2 h/3}$

70. a) $V = \pi\int(x(4-x)^2/16\ dx,0,4) = \mathbf{4\pi/3}$

$O = 2\pi\int(f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\ dx,0,4) = \mathbf{14.266}$

$f'(x) = 0$ = => $x = 4/3$ (Max.: klar) => $r_{max} = f(4/3) = 4\cdot\sqrt{3}/9$

=> $QF_{max} = \pi\cdot r_{max}{}^2 = \mathbf{16\pi/27}$

b) $b = \int(\sqrt{1+f'(x)^2}\ dx,0,4) = \mathbf{4.494}$

c) $s(x) = -32(3x + 4)\cdot(9x^2 + 40x + 16)^{-3/2}$, $s(4/3) = -3\sqrt{3}/16$

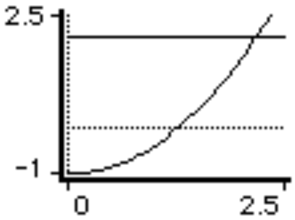
=> $\rho = -16/3\sqrt{3} = \mathbf{-16\sqrt{3}/9}$

71. $y = ax^2 - 1 \Rightarrow x^2 = (y + 1)/a$

$\Rightarrow V = \pi_0\int^2 x^2 dy$

$= \pi/a \cdot {}_0\int^2 (y + 1)dy = 4\pi/a = 20$

$\Rightarrow$ **$a = \pi/5$**



72. V(Paraboloid) = π.

V(Bohrkern) = V(Zylinder) + V(Restparaboloid) = $\pi r^2(2 - r^2)$

$\Rightarrow r =$ SQRT$(1 - \sqrt{2}/2) = 0.541$

73. P(2 [2), $m_t = f'(2) = 3 = (y - 2)/(x - 2) \Rightarrow$ t: $y = 3x - 4$, $y = 0 \Rightarrow x = 4/3$

$V = \pi\int x^6/16dx\ (0,2) - \pi\int(3x - 4)^2dx\ (4/3, 2) =$ **$16\pi/63$**

74. a) D =] -2, 2], N: -2, 0, 2, $f'(x) = (4-2x^4)/\sqrt{(4 - x^2)}$, H,T(+-$\sqrt{2}$] +-2)

b) $f'(x)^2 = 4(x^2 - 2)^2/(4 - x^2)$; $L = 2 \cdot \int_0^2 \sqrt{(1 + f'(x)^2)}dx = 2 \cdot 4.7147 =$ **9.429**

c) $V = \pi \cdot \int_0^2 f(x)^2 dx = 64\pi/15 =$ **4.267**

d) $A = 2\pi \cdot \int_0^2 f(x) \cdot \sqrt{(1 + f'(x)^2)}dx = 10.2222\pi =$ **32.114055**

x = V(Gold)/A = 1g7($\rho \cdot$A) = 0.001614cm = **0.01614mm**

75. g: $y = (R-r)/h \cdot x + r$, $V = \pi\int_0^h ((R-r)/h \cdot x + r)^2dx = \pi(R-r)^2/h^2 \cdot x^2 + 2r(R-r)/h \cdot x + r^2\ ]_0^h$

$= \pi((R-r)^2/h^2 \cdot h^3/3 + r(R-r)/h \cdot xh^2 + r^2h) = \pi h/3 \cdot (R^2 - 2Rr + 3Rr - 3r^2 + 3r^2)$

$=$ **$\pi h/3 \cdot (R^2 + Rr + r^2)$**

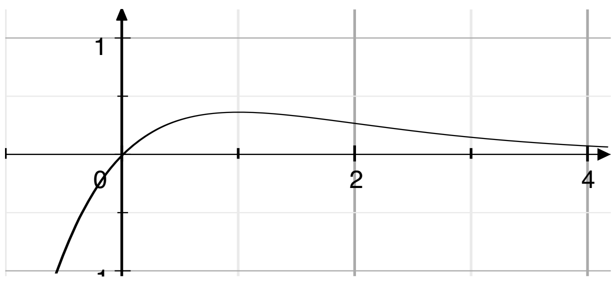
77. $f'(x) = e^{-x}(1-x)$; $f''(x) = e^{-x}(x - 2)$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$; N(0|0), H(1|1/e) = H(1|0.37)

W(2|2/e^2) =W(2|0.27)

$f(x) \to 0$ für $x \to \infty$

$f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$



b) **$F'(x) = x \cdot e^{-x} = f(x)$**

c) $A(k) = {}_k\int^{2k} f(x)dx = [F(x)]_k^{2k} = -2ke^{-2k} - e^{-2k} + k \cdot e^{-k} + e^{-k}$

$=$ **$e^{-k}(k+1) - e^{-2k}(2k+1) = e^{-k}(k + 1 - e^{-k}(2k + 1))$**

d) $A'(k) = -e^{-k}(k+1) + e^{-k} + 2e^{-2k}(2k+1) - 2e^{-2k} = 4k \cdot e^{-2k} - k \cdot e^{-k}$

$= k \cdot e^{-k}(4e^{-k} - 1) = 0 \Rightarrow k_1 = 0$, $k_2 = \ln(4) = 1.39..$

A(0) = 0 (Min!) =>Max bei k_2 (Zeichenwechsel von A′)

=> Max: $A(\ln(4)) = 1/4 \cdot (\ln(4) + 1) - 1/16 \cdot (2\ln(4) + 1)$

$=$ **$1/16 \cdot (2\ln(4) + 3) = 0.361$**

78. $d^2(x) = (x-4)^2 + (0.5x^2 - 2x - 2)^2$

$d^{2\prime}(x) = 2(x-4) + 2(0.5x^2 - 2x - 2)(x-2)$

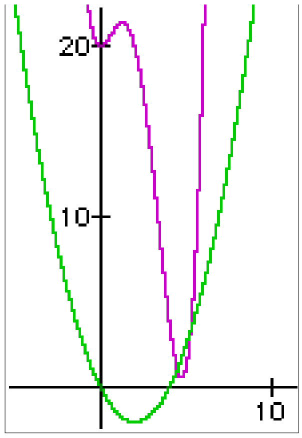
$= x^3 - 6x^2 + 6x \; = x(x^2 - 6x + 6)$

$\Rightarrow x_1 = 0,\; x_{23} = 3 \pm \sqrt{3}$

Skizze => $P_1(0|0)$: d ist lokal minimal, $d = 2\sqrt{5} = 4.47$

$P_2(3-\sqrt{3}|\;\sqrt{3})$: d ist lokal maximal, d = 4.625

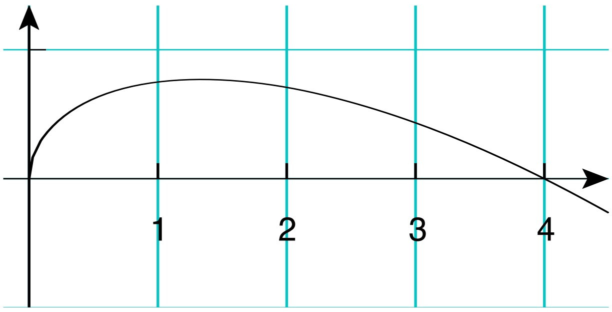
$P_3(3+\sqrt{3}|\;\sqrt{3})$: d ist absolut minimal, d = 0.7795



79. $f'(x) = -\sqrt{x}/k + (1-x/k)\cdot 1/2\sqrt{x} =$

$(k - 3x)/2k\sqrt{x}$

==> Extremum bei $x = k/3$



$V = \pi\int(1 - x/k)^2 x\cdot dx =$

$\pi\int(x - 2x^2/k + x^3/k^2)dx$

$= \pi[x^2/2 - 2x^3/3k + x^4/4k^2]_0^k \; = \pi(k^2/2 - 2k^2/3 + k^2/4) = \pi k^2/12 = 4\pi/3$

==> $k^2 = 16$; ==> **k = +4** ==> $f(x) = (1 - x/4)\sqrt{x}$; $f'(x) = (4 - 3x)/8\sqrt{x} = 0$

==> $x = 4/3$; $f(4/3) =$ **$4\sqrt{3}/9$ = 0,7698 = r**

80. a) $L'(x) = -(1/x\cdot x-(1+\ln(x)))/x^2 = f(x)$

b) 1. Keine Symm. ers., $\mathbb{D} = \mathbb{R}+$

2. N(1|0), Pol bei x = 0

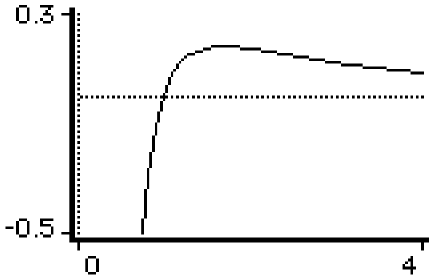
3. $f'(x) = (1-2\ln(x))/x^3 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{e}$,

wackeln => $H(\sqrt{e} \mid 1/2e) = H(1.64|0.184)$

4. $f''(x) = (-5 + 6\ln(x))/x^4 = 0 \;\Rightarrow x = e\hat{}5/6$,

Zeichenwechsel => **W(2.30|0.157)**

5. f—>0 für x —>∞, f —> -∞ für x ↓ 0 As: x = 0; y = 0



c) $F(a) = -(1 + \ln(x))/x \,|_1^a = -(1 + \ln(a))/a + 1$; $f(e^2) =$ **$-3/e^2 + 1 = 0.5940$;**

Lim F(a) = 1

81. a) $-1/6 \cdot (3 + 4x)\hat{}(-3/2)\,|_0^1 = -1/6 \cdot (7\hat{}(-3/2) - 3\hat{}(-3/2)) =$ **0.0231**

b) $15\pi^2\cdot/7 \cdot \ln(x)\,|_{1/e}^{e} = 15\pi^2/7(1 + 1) =$ **$30\pi^2/7$ = 42.3**