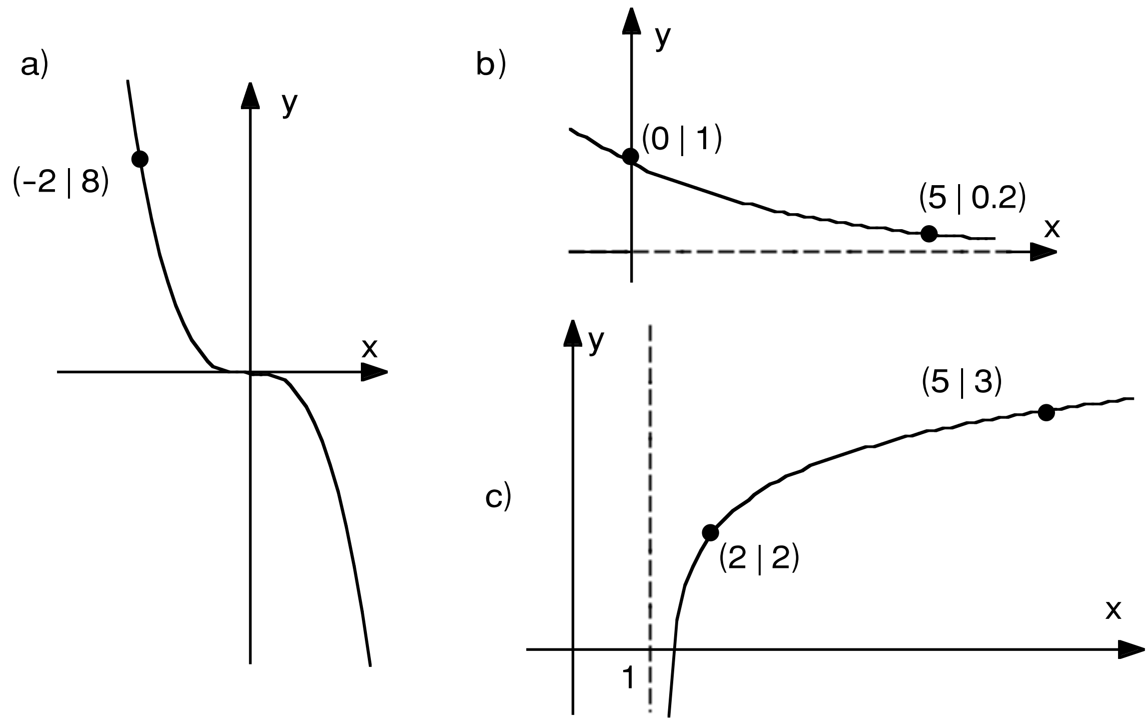
Funktionen, Folgen, Grenzwerte

Funktionen

1. Gib die Gleichungen folgender Funktionen an (es handelt sich um Exponential-, Logarithmus- oder Potenzfunktionen, Asymptoten sind gestrichelt):



2. Geg: $f(x) = 4 - x^2$.

a) Wähle $\mathbf{D}_f$ so, dass f monoton ist.

b) Zeichne den Graphen von f und bestimme $\mathbf{W}_f$.

c) Bestimme die Gleichung und den Graphen von $\overline{f}$.

3. Geg: $f(x) = 1/(x^2+1)$

a) Suche den grösstmöglichen Bereich $\mathbf{D}_f$, in dem f monoton fallend ist.

b) Bestimme $\mathbf{W}_f$ und die Gleichung der Umkehrfunktion $\overline{f}$.

c) Zeichne die Graphen von f unf $\overline{f}$ (LE = 5H).

4. Untersuche auf Beschränktheit und Monotonie und gib die Umkehrfunktion an (falls sie existiert); zeichne die Graphen und bestimme alle Definitions- und Wertebereiche:

a) $p(x) = 2x - 1$, $\mathbf{D} = [-4; 4]$ b) $q(x) = \log(x + 2)$, $\mathbf{D} = [-1; 8]$

5. Bestimme $\mathbf{W_f}$, den Graphen von f und - falls möglich - die Gleichung von $\overline{f}$, sowie $\mathbf{D_{\overline{f}}}$, $\mathbf{W_{\overline{f}}}$ und den Graphen von $\overline{f}$:

a) $f(x) = 8 - 2x$; $\mathbf{D_f} =]2 ; 6]$ b) $f(x) = -\sqrt{x+4}$

c) $f(x) = x^{-1.5} + 1$ d) $f(x) = |\log_2 x|$; $\mathbf{D_f} = [\frac{1}{8} ; 4]$

e) $f(x) = \dfrac{2x-5}{x-3}$

6. Suche ein möglichst grosses Intervall, in welchem y = sinx m.s. ist und zeichne den Graphen der Umkehrfunktion.

7. Gib ein möglichst grosses Intervall [a,b] an mit $a \geqslant 20$, in welchem die Funktion f(x) = sin x streng monoton steigend ist.

8. Untersuche auf Beschränktheit und Monotonie und gib die Umkehrfunktion an (falls sie existiert); zeichne die Graphen und bestimme alle Definitions- und Wertebereiche:

a) $f(x) = 0{,}5x + 3$; $\mathbf{D_f} = [-2; 5]$ b) $g(x) = \dfrac{1}{x-2} - 1$; $\mathbf{G_g} =]2; 6]$

9. Geg: $f(x) = \sqrt{x+2} + 4$
Ges: $\mathbf{D_f}$ (maximal), $\mathbf{W_f}$, Gleichung von $\overline{f}$, $\mathbf{D_{\overline{f}}}$, $\mathbf{W_{\overline{f}}}$, Graphen

10. Bestimme die Gleichung der Umkehrfunktion und gib alle Definitions- und Wertebereiche an: a) $f(x) = (x+4)^{1/3} + 2$ b) $g(x) = 8x^{-3}$

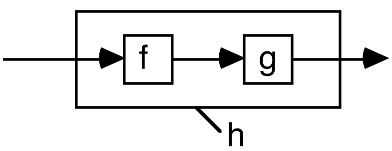
11. Bestimme die Gleichung der Umkehrfunktion und gib alle Definitions- und Wertebereiche an. Zeichne die Graphen:

a) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$; $\mathbf{D_f} = [-4; 2]$

b) $f(x) = 2x^2 - 4x$; $\mathbf{D_f} = \{x \in \mathbf{R} |\ x \geqslant 1\}$

12. Gegeben: f(x) = 1 + cosx. Wähle als D_f ein möglichst grosses Intervall, in welchem f monoton fallend ist, bestimme $\overline{f}$, $D_{\overline{f}}$, $W_{\overline{f}}$. Zeichne die Graphen.

13.



a) $f(x) = 2x^3$; $g(y) = 2\cdot\sqrt{y}$; $h(x) = ?$

b) $f(x) = \dfrac{1}{4x^5}$; $h(x) = x^2$; $g(y) = ?$

14. Geg: $f(x) = x^3$; $g(x) = 2x+5$.
Bestimme (Resultate vereinfacht, ohne Klammern):

a) $g(f(g(x)))$ b) $f(\overline{g}(x))$ c) $g(3x-4)$ d) $\overline{f}(x)$

e) cos(arcsin(0,5)) (exakt, ohne TR, mit Formelsammlung!)

15. Schreibe F(x) in der Form f(g(x)) und gib g(x) und f(u) an:

$$F(x) = \frac{\sin^2(3x)}{27x^3}$$

16. $f(x) = \frac{2}{x^2}$; $g(x) = 1 + x$; $h(x) = \sqrt{1 + x^2}$

a) $f(g(h(x))) = ?$ b) $f(f(h(g(x)))) = ?$ (Resultate vereinfachen !)

17. Gib den grösstmöglichen Definitionsbereich von:

a) $f(x) = \sqrt{4 - \log x}$ b) $g(x) = 10^{4 - x^2}$

c) gib einen einfachen Ausdruck für F(x) = f(g(x)).

18. $m(z) = 1 + z^2$; $p(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}$; $r(v) = 2^v$.

a) $m(p(r(x))) = ?$ b) $n(x) = m(r(p(x)))$; $n(x) = ?$; $\overline{n}(x) = ?$

19. Geg: $f(x) = 1 + x$; $g(x) = x^{-1}$; $h(x) = \log x$. Bestimme:

a) $f(\frac{t}{2})$; b) $g(n^3 - 2n)$; c) $h(\sqrt{x})$; d) $F(x) = f(g(h(x)))$; e) $F(100)$;

f) den grösstmöglichen Definitionsbereich von F.

20. Schreibe F(x) in der Form f(g(x)), bestimme g(x) und f(u) und gib den **grösstmöglichen** Definitionsbereich für F an:

a) $F(x) = \frac{(1 + \log x)^2}{5}$ b) $F(x) = \sqrt{\sin x}$

21. Geg: $f(x) = (x^2 - 2x - 3)/(x^2 - 9)$. Wie ist f(3) zu definieren, damit f an der Stelle x = 3 stetig ist ?

22. Gib Unstetigkeitsstellen und Definitionslücken an und beschreibe sie. Bestimme alle erforderlichen Limites (auch für x --> ∞ und x --> -∞) sowie die Gleichungen der Asymptoten. Skizziere den Graph:

a) $f(x) = \frac{3x}{x - 2}$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

23. Untersuche auf Stetigkeit. Beschreibe die Unstetigkeitsstellen resp. die Definitionslücken. Bestimme alle erforderlichen Limites (auch für x --> ∞ und x --> -∞) sowie die Gleichungen eventueller Asymptoten. Skizziere den Graph:

a) $f(x) = \dfrac{4x}{x+2}$ b) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{für } x \leq 0 \\ |x| + 1 & \text{sonst} \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} 2^{-\frac{1}{|x|}} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

24. Die Funktion f hat bei x = -1 eine Definitionslücke. Lässt sich f dort stetig fortsetzen ? (Antwort begründen)

$$f(x) = \frac{x^2 - 18x - 19}{x^2 - 1}$$

25. Schreibe ausführlich (Summe nicht ausrechnen):

a) $\sum\limits_{k=3}^{6} (2^{k+1} - k)$ b) $\sum\limits_{j=0}^{\infty} j \cdot x^j$

26. $s = 7 + 9 + 11 + 13 + ... + 123$

Schreibe s mit Hilfe des Summenzeichens und berechne s von Hand.

27. Beweise:

$$\sum_{k=0}^{100} x^{2k} - \sum_{j=1}^{101} x^{2j} = (1 + x^{101}) \cdot (1 - x^{101})$$

Folgen

28. a) Bestimme das 7. Glied der rekursiv definierten Folge (a_n) mit $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + n$ und definiere dann die Folge explizit.

b) Die Folge (b_n) ist gegeben durch $b_n = 2n + 1$. Definiere sie rekursiv!

29. a) Bestimme das 7. Glied der rekursiv definierten Folge (a_n) mit $a_1 = 2$ und $a_{n+1} = 2a_n + 1$ und definiere dann die Folge explizit.

b) Die Folge (b_n) ist gegeben durch $b_n = 2^n \cdot n$. Definiere sie rekursiv!

30. Geg: a) $(a_n) = 5, -3, -11, -19, ...$ b) $(a_n) = 5, 15, 45, 135, ...$

Ges: a_n, s_n, a_{16}, s_{16}

31. Geg: a) $(a_n) = -7, -2, 3, 8, ...$ b) $3, -1, 1/3, -1/9, ...$

Ges: a_n, s_n, a_{20}, s_{20}

32. Geg: a) $(a_n) = 9, 4, -1, -6, ...$ b) $(a_n) = 2, 6, 18, 54, ...$

Ges: a_n, s_n, a_{20}, s_{20}

33. Geg: a) $(a_n) = 11,\ 11\sqrt{3},\ 33,\ 33\sqrt{3},\ ...$ b) $11,\ 3,\ -5,\ -13,\ ...$
Ges: $a_n,\ s_n,\ a_{30},\ s_{30}$.

34. Berechne die Summe aller durch 17 teilbaren 4-ziffrigen Zahlen.

35. Berechne die Summe aller 5-stelligen 13-er Zahlen

36. Vom wievielten Gliede an sind die Glieder der Folge
a) 4/5, 4, 20, 100,.... grösser als 10^{150} ?
b) 100, 20, 4, 4/5,.... kleiner als 10^{-50}

37. $(a_n) = 4, 20, 100, 500,...$ Von welchem Glied an gilt:
a) $a_n > 10^{20}$ b) $s_n > 10^{20}$?

38. Geg: $(a_n) = 50, 10, 2, 2/5, ...$ a) Von welchem n an gilt: $a_n < 10^{-10}$?
b) s_n strebt mit wachsendem n gegen die Zahl s = 62.5. Von welchem n an gilt $s - s_n < 10^{-20}$?

39. In einer g.F. ist die Summe der ersten 2 Glieder 24, die Summe aus dem 3. und dem 4. Glied ist 1176. Bestimme die ersten 4 Glieder.

40. Die Summe einer 4-gliedrigen a.F. ist 300. Wird das dritte Glied weggelassen, so bleibt eine g.F. übrig. Bestimme die a.F.

41. Die Summe der ersten 4 Glieder einer wachsenden a.F. ist 350. Wird das dritte Glied weggelassen, so bleibt eine g.F. übrig. Bestimme die a.F.

42. Drei Zahlen bilden eine g.F. Wird von der ersten Zahl die Zahl 9 subtrahiert, so ergibt sich eine a.F. Wird nun vom zweiten Glied dieser a.F. die Zahl 2 subtrahiert, entsteht wieder eine g.F. Wie heissen die drei ursprünglichen Zahlen ?

43. Die Erdbevölkerung betrug im Jahre 1960 2,95 Milliarden, im Jahre 1972 3,80 Milliarden.Wieviel wird sie im Jahre 2000 betragen unter der Annahme, dass sie sich jährlich um einen konstanten Faktor vermehrt ?

44. Beweise: Wenn die Gleichung $ax^2 + 2bx + c = 0$ genau eine Lösung hat, so ist a, b, c eine g.F.

45. Beweise: Wenn a, b, c aufeinanderfolgende Glieder einer g.F. sind, so hat die Gleichung $ax^2 + 2bx + c = 0$ genau eine Lösung.

46. <u>Voraussetzung</u>: Die Zahlen x, y, z bilden eine a.F.
<u>Behauptung</u>: Die Zahlen $a = y^2 + yz + z^2$, $b = z^2 + zx + x^2$ und $c = x^2 + xy + y^2$ bilden eine a.F.
<u>Beweis</u>: ?

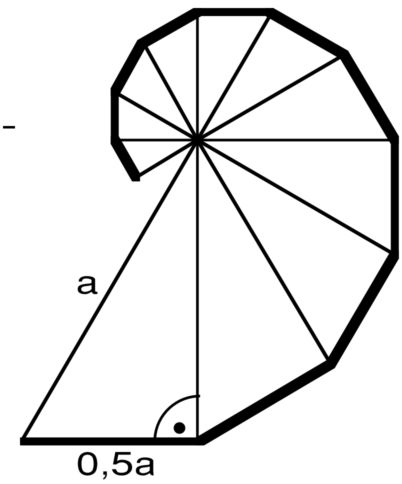
47. In einem rechtwinkligen Dreieck bilden die Seiten eine g.F. Berechne die Winkel. (Gradmass, 4 signifikante Ziffern)

48. Einem Quadrat mit Seitenlänge 1 wird ein Kreis einbeschrieben, diesem wieder ein Quadrat, diesem ein Kreis etc.

a) Bestimme die Flächen F_1, F_2, F_3, F_4 der ersten 4 Quadrate.

b) Welche Nummer hat das grösste Quadrat, dessen Fläche kleiner als 10^{-10} ist ?

49. Die Dreiecke dieser Schnecke sind alle ähnlich.



a) Bestimme den Umfang U_n (nur die dick ausgezogenen Strecken) und die Fläche F_n der n-gliedrigen Schnecke. (Doppelbruch stehen lassen)

b) Was lässt sich über die Terme U_n und F_n sagen, wenn n beliebig gross wird ? (Resultat ohne Doppelbruch !)

50. a) Wieviele Glieder der a.F. 3, 9/2, 6,..... ergeben die Summe 4620 ?
b) Wieviele Glieder der g.F. 6, 12, 24,...... ergeben die Summe 6138 ?

51. Wie gross ist die Summe aller 2-er Potenzen, die kleiner als 10´000´000 sind und deren Exponenten natürliche Zahlen sind ?

52. Die Summe der ersten 5 Glieder einer wachsenden a.F. ist 40, Die Summe der ersten 8 Glieder ist 100. Bestimme die Folge.

53. Drei voneinander verschiedene Zahlen a, b, c mit Summe 3 bilden in dieser Reihenfolge eine a.F., in der Reihenfolge b, c, a eine g.F. Berechne die Zahlen.

54. In einem rechtwinkligen Dreieck bilden die Seiten eine a.F. Bestimme die Winkel (auf 3 signifikante Ziffern).

55. Bei den DIN-Papierformaten A0, A1, ...,A10 entsteht jedes Format aus dem vorangehenden durch Halbieren. Genauer: Wenn a_0 und b_0 die Seiten von A0 sind und a_1 und b_1 die Seiten von A1, dann ist $a_1 = b_0$ und $b_1 = 0{,}5a_0$. Das Verhältnis $a_0{:}b_0$ ist so gewählt, dass die Rechtecke der Folge zueinander ähnlich sind.

a) Bestimme $a_0{:}b_0$

b) Berechne $a_1, a_2, ..., a_5$ aus a_0

c) A0 hat die Fläche $1\,m^2$. Berechne die Fläche und die Seiten von A4.

56. Eine g.F. besteht aus 100 positiven Gliedern. Sie beginnt mit 1 und endet mit 1000. Berechne die Summe der Zehnerlogarithmen dieser 100 Zahlen.

Wo nichts anderes verlangt: Resultate exakt!

Grenzwerte

57. Gegeben: $a_n = \dfrac{5}{n^{0.1} + 1}$. a) Beweise: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

b) Bestimme n_0 so, dass $|a_n| < 0.1$ für $n > n_0$.

58. $a_n = \dfrac{-3}{\sqrt{n^2 - 30}}$. Bestimme n_o so, dass $|\,a_n| < 10^{-2}$ für $n > n_o$.

59. Beweise: $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{4n}{2n - 1} = 2$. (Bestimme zu jedem $\epsilon > 0$ ein n_o...)

60. $a_n = (2n + 1)/4n$. Bestimme den Grenzwert g sowie das kleinste n_o so, dass $|g - a_n| < 10^{-4}$ für $n > n_o$.

61. $a_n = 2n^2/(n-1)$. Bestimme das kleinste n_0 so, dass $a_n > 1000$ für $n > n_0$.

62. Berechne:

a) $s_a = 25 + 5 + 1 + 0{,}2 + ...$ b) Schreibe s_a mit Hilfe des Summenzeichens.

c) $s_3 = 101 - \sqrt[3]{10201} + 101^{\frac{1}{3}} - 1 +- ...$

63. Berechne:

a) $s = 27 + 9 + 3 + 1 + \ldots$ b) $s = 2{,}7 - 0{,}9 + 0{,}3 - 0{,}1 +- \ldots$

c) $s = a + ab^{-2} + ab^{-4} + ab^{-6} + \ldots$, mit $b > 1$

d) Schreibe die Reihe von c) mit Hilfe des Summenzeichens

e) $x = \sum_{k=1}^{15} 4 \cdot (-3)^k$

64. Bestimme:

a) $s = 81 + 27 + 9 + \ldots$ b) $s = 0.1 - 0.05 + 0.025 - 0.0125 +- \ldots$

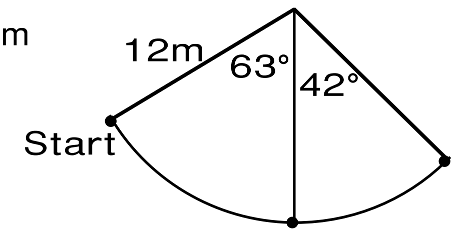
65. ☞ a) Berechne $s = 81 + 27 + 9 + 3 + 1 + \ldots$.

b) Berechne: $s = 100 - 10 + 1 - 0{,}1 + 0{,}01 -+ \ldots$

c) Schreibe $z = 0{,}6\overline{45}$ mit Hilfe einer geom. Reihe und gib dann z in der Form a/b mit $a,b \in \mathbb{Z}$.

66. Gib $z = 0{,}1\overline{23}$ in der Form a/b mit $a,b \in \mathbb{Z}$ an. Benutze dabei eine g.F.

67. Ein Pendel (= Kugel an Faden) wird in der Startposition losgelassen und kommt nach längerem Hin- und Herschwingen zur Ruhe. Die Auslenkwinkel nehmen dabei stets im gleichen Verhältnis ab wie die beiden eingezeichneten Winkel.



Berechne den Gesamtweg des Pendels vom Start bis zur Ruhelage.

68. Ein Ball wird aus 1m Höhe fallengelassen. Nach dem Aufprall am Boden steigt er wieder senkrecht auf eine Höhe von 80cm, worauf er wieder nach unten fällt... . Berechne den theoretischen Gesamtweg s unter der Annahme, dass die Höhen stets im gleichen Verhältnis abnehmen und dass die Bewegung nur vertikal erfolgt.

69. Auf einem Würfel mit der Kante k = 1m steht ein zweiter Würfel mit halbem Volumen, worauf ein dritter Würfel steht, dessen Volumen die Hälfte des zweiten ist .....

Vom ganzen Turm mit den unendlich vielen Würfeln bestimme:

a) das Volumen b) die Höhe c) die Oberfläche

70. Einem Würfel mit Kanteklänge 1 wird ein zweiter Würfel so aufgesetzt, dass die Ecken seiner Bodenfläche die Seitenmitten der Deckfläche des ersten Würfels sind. Mit dem zweiten Würfel wird entsprechend verfahren, u.s.w.
Berechne:
a) Die Gesamthöhe des entstehenden Turmes, b) sein Volumen,
c) seine Oberfläche.

71.
Im Theorieheft stehen die Formeln $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ und $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Beweise damit die folgende Formel aus der Formelsammlung:

$$s_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$$

72. Die Folge (a_n) mit $a_n = 5 \lg(n) : (7 + \lg(n))$ hat den Grenzwert 5.
Wie gross muss n mindestens sein, damit a_n um höchstens 10^{-3} vom Grenzwert abweicht?

73. Bestimme mit Rechnen (div. Tricks) oder mit Ueberlegen , **ohne** TI: es zählen nur vollständig dokumentierte Rechnungen:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4x^3 + 5x}{2x^2 - 7}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{7x^4 - 9x^2}{19 - 3x^4}$

c) $\lim\limits_{x \uparrow 6} \frac{x^2 + 7x + 1}{x^2 - 36}$ d) $\lim\limits_{x \downarrow -6} \frac{x^2 + 7x + 6}{x^2 - 36}$

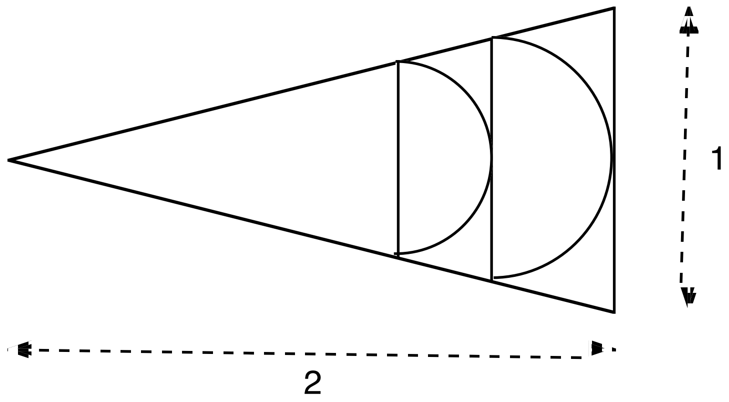
e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{13} - \sqrt{x + 13}}$ f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - \cos^2(7x)}}{\sin(3x)}$

g) $f(x) = (x + 1)^3$; $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = ?$

74. Berechne: a) $1 + 0{,}3 + 0{,}09 + 0\ 027 + 0{,}0081 + \ldots$
b) $75 - 45 + 27 - 81/5 + 243/25 - + \ldots$
c) Stelle $0{,}\overline{123}$ mit Hilfe einer unendlichen geometrischen Reihe als rationale Zahl dar.

75.

Dem gleichschenkligen Dreiecksind unendlich viele Halbkreise einbeschrieben.
Berechne die Summe aller Halbkreisflächen.



76. Bestimme folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 3}{-6x^4}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x - 1}{\sqrt{x} + 1}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} -\frac{1}{2^x}$ d) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{2x^2 - 18}{x - 3}$

e) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x - 5}{x^2 - 3x - 10}$ f) $\lim\limits_{x \uparrow 4} \frac{2 - x}{x - 4}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{5x}$ h) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x - 2 \cdot \sin x}$

i) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(5 + h) - f(5)}{h}$, für $f(x) = ax^2$

k) wie i) für $f(x) = \frac{1}{x}$

77.

Beweise: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x + 5x^2} = \frac{2}{5}$.

(Wähle $\epsilon > 0$ und bestimme x_0 in Abhängigkeit von ϵ so, dass...)
Mache für x --> $+\infty$ die Probe mit $\epsilon = 10^{-2}$.

78. Gib die Gleichung einer Funktion f an, die den folgenden drei Bedingungen genügt: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$; $0 \notin D_f$; $f(1) = 3$.

79. Bestimme (mit TR, Tricks oder Überlegung; Lösungsweg angeben):

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x - 3x^3}{4x^4 + 1}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-e^{-x})$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{2}{x} - \dfrac{x^2 + 6x}{3x^2}\right]$

d) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{x^2 - 4x - 12}{x - 6}$ e) $\lim\limits_{x\uparrow 2} \dfrac{x}{x^2 - 4}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2\cdot\sqrt{1 + x^2}}{4x}$

g) $\lim\limits_{x\downarrow 0} \dfrac{\cos x^2}{e^{\sqrt{x}}}$ h) $\lim\limits_{x\downarrow 0} \ln\left(\dfrac{e\cdot x}{\sin x}\right)$ i) $\lim\limits_{x\uparrow 0} \sin(x^{-1})$

k) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(7 + h) - f(7)}{h}$ für $f(x) = 2x^2$

l) Wie k) für $f(x) = \sqrt{x}$

80. Berechne:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2(x - 1)(x + 1)}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{9}{x - 1} - \dfrac{8x + 10}{x^2 - 1}$

c) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 + 10x - 75}{x - 5}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x - 3}{2\sqrt{x^2 + 5}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\dfrac{\sin ax}{2bx}}$ f) $\lim\limits_{x\uparrow 0} \ln\dfrac{1}{x^2}$

81.

Für welche Werte von k gilt: $\lim\limits_{x\to k} \dfrac{\sqrt{k} - \sqrt{x}}{k - x} = 1$?

82. $f(x) = \dfrac{15x^2 - 24x - 12}{3x - 6}$. Es ist $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 12.$

Wie nahe muss x mindestens bei 2 liegen, wenn f(x) um höchstens 10^{-3} vom Grenzwert abweichen soll ?

83. Bestimme (mit TR, Tricks oder Überlegung; Lösungsweg angeben):

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^4 - 3x^2}{6 - 2x^4}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{1}{2^x}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{9}{x - 1} - \dfrac{8x + 10}{x^2 - 1}$ d) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x^2 - 4x - 21}{x - 7}$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x + 3}{3\sqrt{x^2 + 7}}$ f) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{7}}{x - 7}$

g) $\lim\limits_{x \uparrow 0} \dfrac{1}{1 - 2^{\frac{1}{x}}}$ h) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{\dfrac{\sin 7x}{6x}}$

i) $\lim\limits_{x \downarrow 1} \dfrac{\sin x}{\log(x^{100})}$ k) $\lim\limits_{x \uparrow 0} \sin(x^{-1})$

l) $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n)$ mit $|x| < 1$

84. $f(x) = \dfrac{4 - 3x^2}{2x^2 + 1}$. Behauptung: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -1{,}5$. Beweis ?

85. Bestimme (mit TR, Tricks oder Überlegung; Lösungsweg angeben):

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^4 + 2x^2}{5 - 3x^4}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{2^{-x}}$ c) $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \dfrac{x^8 - 16}{2x^2 - 4}$

d) $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{x^2 - 3x - 18}{x^2 - 10x + 24}$ e) $\lim\limits_{x \to -\sqrt{2}} \dfrac{x^2 - 2}{x\sqrt{2} + 2}$ f) $\lim\limits_{x \uparrow 1} \dfrac{x^2 + 2}{\log x}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{2x}$ h) $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{b}}{x - b}$ i) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{\dfrac{1 - \cos^2 x}{2x}}$

86. Geg: $f(x) = \dfrac{5x^2 - 4x - 12}{2x - 4}$; $\epsilon = 10^{-2}$. Es ist $g = \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 8$.

a) Bestimme δ so, dass für alle x aus der δ-Umgebung von 2 gilt: f(x) liegt in der ϵ-Umgebung von g.

b) Gleiche Aufgabe für $\epsilon = 10^{-4}$.

87. $f(x) = \dfrac{x}{x - 2}$. Bestimme die Limites für $x \to \pm\infty$, $x \uparrow 2$, $x \downarrow 2$.

Gib die Gleichungen der Asymptoten an. Zeichne den Graphen.

88. Geg: a) $f(x) = (x + 1)^2$ b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Bestimme jeweils $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

89. Geg: a) $f(x) = 2\cdot(x-1)^2$ b) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

Bestimme jeweils $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

90. $f(x) = \dfrac{6x^2 - 3x - 18}{3x - 6}$. Es ist $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 7$.

Wie viel darf x höchstens von 2 abweichen, wenn f(x) um höchstens 10^{-3} vom Grenzwert abweichen soll ?

91. ☞ a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^4 - 3x^2}{6 - 2x^4}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{1}{2^x}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n)$ mit $|x| < 1$

92. Bestimme (mit TR, Tricks oder Überlegung; Lösungsweg angeben):

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+3}{3\sqrt{x^2+7}}$ f) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{7}}{x - 7}$

g) $\lim\limits_{x\uparrow 0} \dfrac{1}{1 - 2^{\frac{1}{x}}}$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\dfrac{\sin 7x}{6x}}$

i) $\lim\limits_{x\downarrow 1} \dfrac{\sin x}{\log(x^{100})}$ k) $\lim\limits_{x\uparrow 0} \sin(x^{-1})$

l) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n)$ mit $|x| < 1$

93. Bestimme folgende Limites (Überlegungen, bzw. TR-Methode angeben):

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+3}{3\cdot\sqrt{x^2+7}}$ b) $\lim\limits_{x\uparrow 0} \dfrac{1}{5 - 5^{-\frac{1}{x}}}$

c) $\lim\limits_{x\downarrow 0} \cos(x^{-1})$ d) $\lim\limits_{x\downarrow 1} \dfrac{\sin(x)}{\ln(x^{23})}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n)$ mit $|a| < 1$

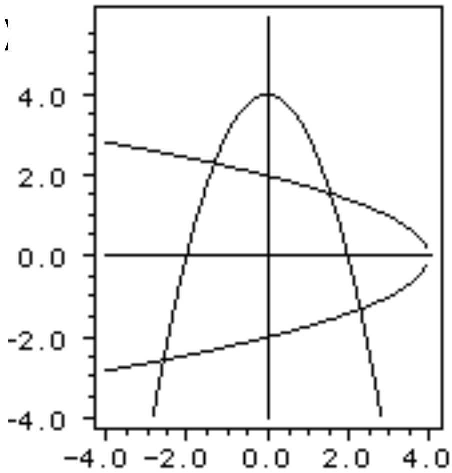
Funktionen, Folgen, Grenzwerte : Lösungen

1. a) $y = (-x)^k$ ==> $\mathbf{y = (-x)^3 = -x^3}$

b) $y = a \cdot b^x$ ==> $\mathbf{y = ((o.2)^{1/5})^x = 0.7248^x}$

c) $y = \log b(x - 1) + c$ ==> $\mathbf{y = \log_4(x - 1)}$

2.

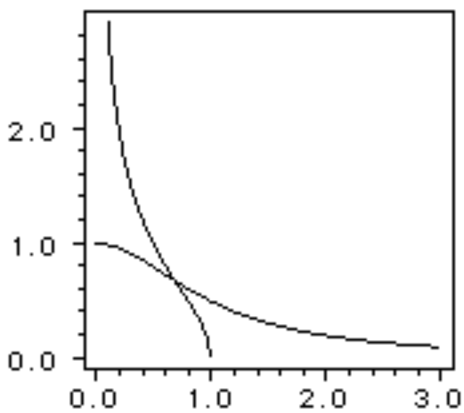


a) $\mathbf{D} \subset\ ]-\infty,0]$ oder $\subset [0,\infty[$

b) $\mathbf{W} \subset\ ]-\infty.4]$

c) $\mathbf{\overline{f}(x) = \pm \sqrt{(4 - x)}}$

3.



a) $Df = R+,0 = [0; \infty[$

b) $Wf =]0,1]$

$\overline{f}(x) = \sqrt{(1/x - 1)} = \sqrt{((1-x)/x)}$

c)

4. a) p: beschr.; K = 7 ; k = -9 ms

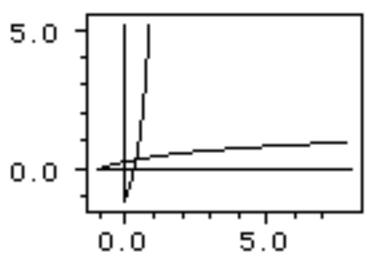
==> $\overline{p}$ ex.; $\overline{p}(x) = x/2 + 0,5$

$\mathbf{D_p} = [-4; 4] = \mathbf{W}_{\overline{p}}$; $\mathbf{W_p} = [-9; 7] = \mathbf{D}_{\overline{p}}$

b) q: beschr, ; K = 1 ; k = 0 ; ms

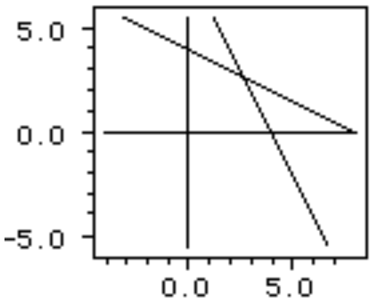
==> $\overline{q}$ ex,; $\overline{q}(x) = 10^x - 2$

$\mathbf{D_q} = [-1; 8] = \mathbf{W}_{\overline{q}}$; $\mathbf{W_q} = [0; 1] = \mathbf{D}_{\overline{q}}$



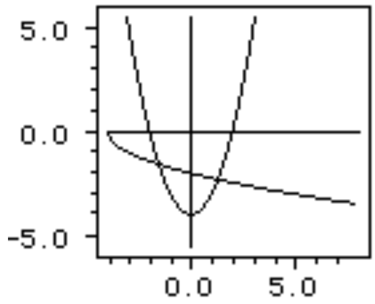
5. a) K = 4 ; k = −4 ; $\overline{f}(x) = 4 - x/2$

Wf = [−4; 4[= **D**$\overline{f}$; **W**$\overline{f}$ =]2; 6]



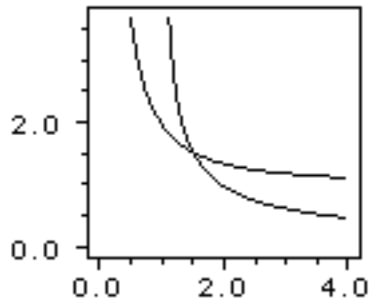
b) K = 0 ; k ex. n. ; $\overline{f}(x) = x^2 - 4$

Wf = **R**$-_0$ = **D**$\overline{f}$; **W**$\overline{f}$ =][−4; 9]

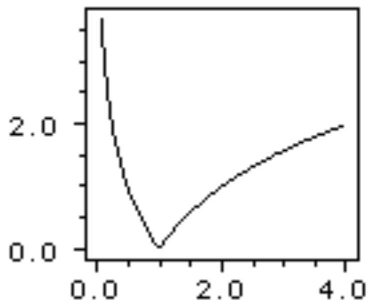


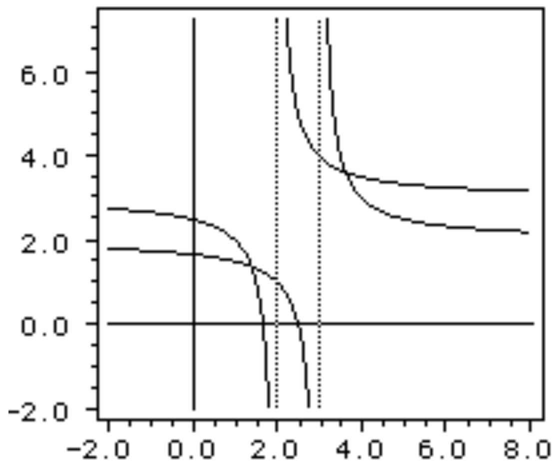
c) K ex n ; k = 1 ; $\overline{f}(x) = (x-1)^{-2/3}$

Wf =]1; ∞[= **D**$\overline{f}$; **W**$\overline{f}$ = **R**+



d) K = 3 ; k = 0 ; $\overline{f}$ ex n

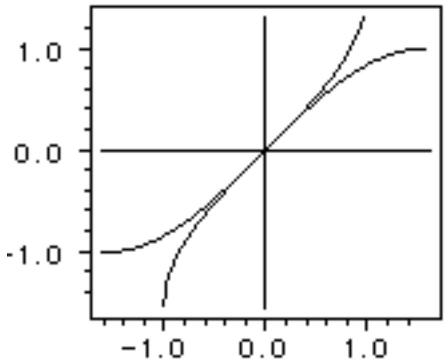




e) K,k ex n; $\overline{f}(x) = (3x-5)/(x-2)$

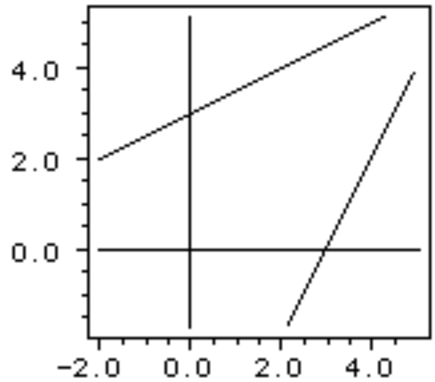
Wf = **R**\{2} = **D**$\overline{f}$; **W**$\overline{f}$ = **R**\{3}

6.

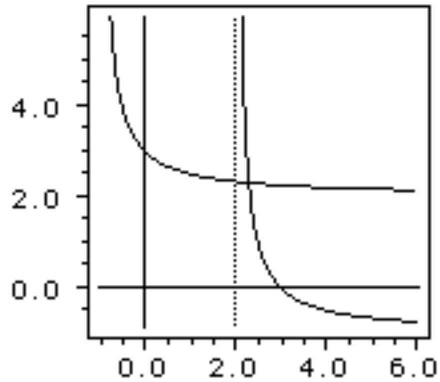


7. [7.5π ; 8.5π] = [23.6 ; 26.7]

8. a) beschr. ; k = 2 ; K = 11/2 ; ms
$\overline{f}(x) = 2x - 6$
Wf = [2; 11/2] = **D**f; **W**$\overline{f}$ = [-2; 5]



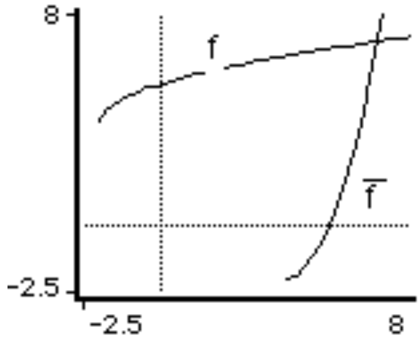
b) k = -3/4 ; K ex n ; mf ;
$\overline{g}(x) = 1/(x+1) + 1 = (2x+3)/(x+1)$
Wg = [-3/4; ∞[= **D**g; **W**$\overline{g}$ =]2; 6]



9.

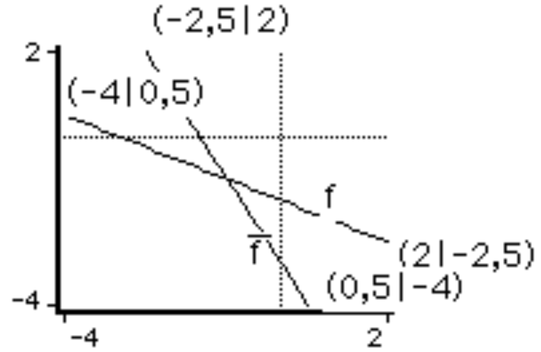
Df = [-3; ∞[, Wf =]-1 ; ∞]

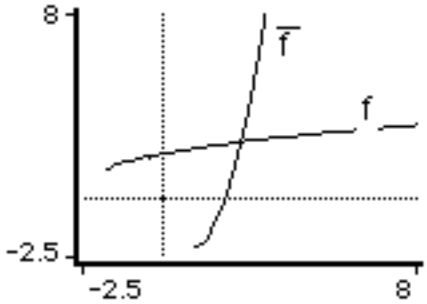
$\overline{f}(x) = x^2 + 2x - 2$; D$\overline{f}$ =Wf, W$\overline{f}$ = Df



10. a) **$\overline{f}(x) = (x - 2)^3 - 4$; Df = W$\overline{f}$ = [-4 ; ∞[; Wf = D$\overline{f}$ = [2 , ∞[**
b) **$\overline{f}(x) = \text{sign}(x)\cdot 2\cdot|x|^{-1/3}$; Df = W$\overline{f}$ = D$\overline{f}$ = Wf = R\{0}**

11.

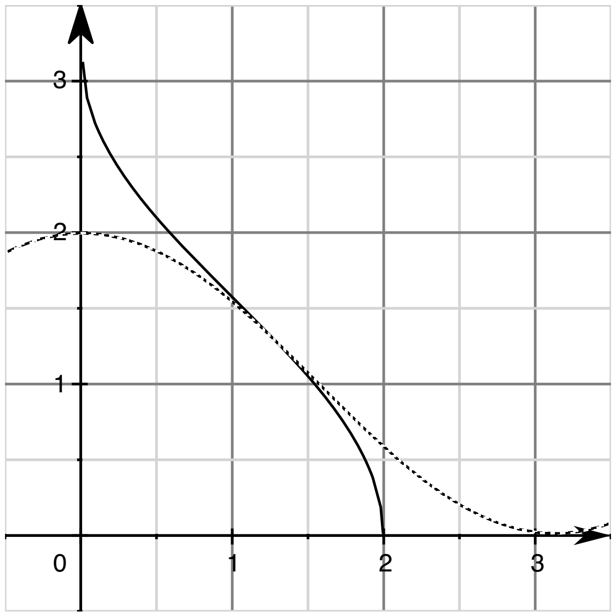




a) $\mathbf{\overline{f}(x) = -2x-3}$;
Wf = D$\overline{\mathbf{f}}$ = [-2,5 ; 0,5]

b) $\mathbf{\overline{f}(x) = 1 + 0{,}5\cdot\sqrt{4+2x}}$;
Wf = D$\overline{\mathbf{f}}$ = [-2 ; ∞[

12. $D_f = [0, \pi] = W_{\overline{f}}$
$W_f = [0, 2] = D_{\overline{f}}$
$\overline{f}(x) = \arccos(x - 1)$



13. a) **h(x)** = g(f(x) = g($2x^3$) = $\mathbf{2\sqrt{3x^3}}$
b) g(1/($4x^5$)) = x^2 ==> **g(y) = $\mathbf{(4y)^{-2/5}}$**

14. a) $2(2x+5)^3+5$ = $\mathbf{16x^3 + 120x^2 + 300x + 155}$
b) $(x-5)^3/8$ = $\mathbf{(x^3 - 15x^2 + 75x - 125)/8}$
c) **6x - 3**
d) **$\mathbf{x^{1/3}}$ für x ⩾ 0, $\mathbf{-(-x)^{1/3}}$ sonst**
e) = cos 30° = **(√3)/2**

15. g(x) = 3x ; f(u) = $\sin^2 u/u^3$

16. a) $2/(1 + \sqrt{(1+x^2)})^2$ = $\mathbf{2/(2 + x^2 + 2\sqrt{(1 + x^2)})}$
b) $0.5(1 + (1 + x))^2$ = $\mathbf{0{,}5(4 + 4x + x^2)}$

17. a) **]0 ; $\mathbf{10^4}$]** b) **R** c) **|x|**

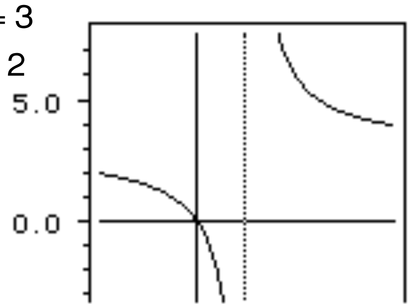
18. a) **y = 1 + 1/2x**
b) **n(x) = 1 + 22/√x** ; $\overline{n}(x) = (2\cdot\log 2/\log(x-1))^2$ = $\mathbf{(2/lb(x-1))^2}$

19. a) $t/2 + 1 = (t+2)/2$ b) $1/(n^3 - 2n)$ c) $\log\sqrt{x} = 0{,}5\cdot\log x$ d) $1 + 1/\log x$
e) $3/2$ f) $\mathbf{R}+\backslash\{1\}$

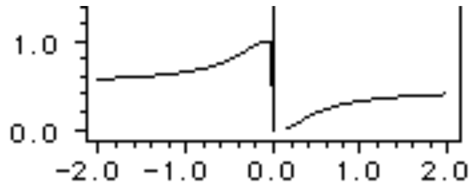
20. a) $f(u) = u^2/5$; $g(x) = 1 + \log x$; $\mathbf{D = R}+$
b) $f(u) = \sqrt{u}$; $g(x) = \sin x$; $\mathbf{D} = \{x|2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$

21. $f(x) = (x+1)(x-3)/(x^2-9) = (x+1)/(x+3)$, $x\neq 3$; $\mathbf{f(3) = 2/3}$

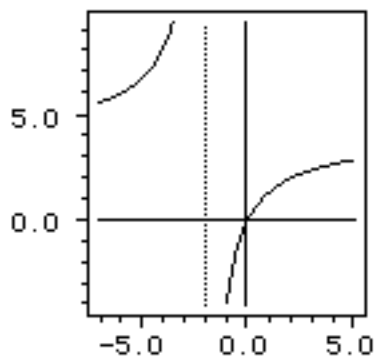
22. a) li(re)limes bei 2: $-\infty(+\infty)$
==> Lucke bei $x = 2$; ∞-Sprung
lim bei $\pm\infty = 3$
A: $y = 3$; $x = 2$



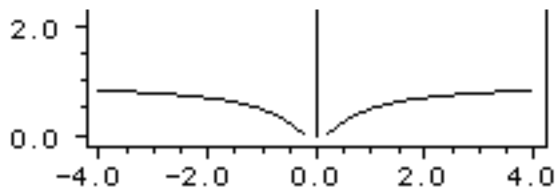
b) li (re) lim bei 0: 1 (0)
==> unstetig bei $x = 0$; endl. Sprung
lim bei $\pm\infty = 1/2$
A: $y = 1/2$



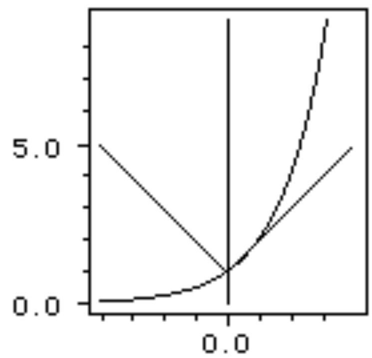
23. a) li(re)limes bei -2: $+\infty(-\infty)$
==> Lücke bei $x = -2$; ∞-Sprung
lim bei $\pm\infty = 4$
A: $y = 4$; $x = -2$
stetig in $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$



c) li (re) lim bei 0: 0
==> unstetig bei $x = 0$; Einsiedler
lim bei $\pm\infty = 1$
A: $y = 1$



b) li(re) lim bei 0 : $1 = f(0)$
==>stetig in $\mathbb{R}$
lim bei $-\infty$ $(+\infty) = 0$ (∞)
A: $y = 0$; $y = x+1$



24. $f(x) = (x+1)(x-19)/(x+1)(x-1) = (x-19/(x-1)$, $x\neq -1$. ==> **ja : f(−1) = 10**

25. a)$(2^4 - 3) + (2^5 - 4) + \ldots + (2^7 - 6) = 13 + 28 + 59 + 122$
b) $0\cdot x^0 + 1\cdot x^1 + 2\cdot x^2 + \ldots\ldots = 0 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots\ldots$

26. $\Sigma(2n+1, n, 3{,}61) = \Sigma(2n+7,n,0, 58) = \Sigma($

S: $a_1 = 7$, $a_n = 123$, $n = 29 \Rightarrow s = 0.5\cdot59\cdot(7 + 123) = 59\cdot65 =$ **2535**

27. $1 + x^2 + x^4 + ... + x^{200} - (x^2 + x^4 + ... + x^{200} + x^{202}) = 1 - x^{202} = (1 + x^{101})(1 - x^{101})$

28. a) 1, 2, 4, 7, 11, 16, **<u>22</u>**. $a_n = 0{,}5(n^2-n+2)$

b) $(b_n) = 3, 5, 7, 9, 11, 13, ..$; $b_1 = 3$; $b_{n+1} = b_n + 2$

29. a) 2, 5, 11, 23, 47, 95, **191** ; $a_n = 3\cdot2^{n-1}-1$

b) $(a_n) = 2, 8, 24, 64, 160,...$; $a_1 = 2$; $a_{n+1} =$ $\mathbf{2\cdot a_n\cdot n/(n-1)}$

30. a) $d = -8$; $\mathbf{an = 13 - 8n;\ a_{16} = -115\ ;\ sn = n(9-4n)\ ;\ s_{16} = -880}$

b) $q = 3$; $\mathbf{an = 5\cdot3^{n-1}}$; $\mathbf{a_{16} = 71'744'535;\ sn = 2{,}5\cdot(3^n - 1);\ s_{16}=}$
$\mathbf{1{,}076168\cdot10^8}$

31. a) $d = -7$; $\mathbf{an = 5n - 12;\ a_{20} = 88;\ sn = n(5n-19)/2;\ s_{20} = 810}$

b) $q = -1/3$; $\mathbf{an = 3\cdot(-1/3)^{n-1} = -(-1/3)^{n-2};\ a_{20} = -1/3^{18} = -2{,}581\cdot10^{-9}}$

$\mathbf{sn = 9(1-(-1/3)^n)/4;\ s_{20} = 2{,}25}$

32. a) $d = -5$; $\mathbf{an = 14-5n;\ a_{20} = -86;\ sn = n(23-5n)/2;\ s_{20} = -770}$

b) $q = 3$; $\mathbf{an = 2\cdot3^{n-1};\ a_{20} = 2{,}3245\cdot10^9;\ sn = 3^n - 1;\ s_{20} =}$
$\mathbf{3'486'784'339 = 3.487\cdot10^9)}$

33. a) $q = \sqrt{3}$; $\mathbf{an = 11\sqrt{3}^{n-1};\ sn = 11(\sqrt{3}^n-1)/(\sqrt{3} - 1);}$
$\mathbf{a_{30} = 91'127'797\ ;\ s_{30} = 2{,}1561\cdot10^8}$

b) $d = -8$; $\mathbf{an = 19 - 8n;\ sn = 15n - 4n^2;\ a_{30} = -221;\ s_{30} = -3150}$

34. $a_1 = 59\cdot17$; $an = 588\cdot17 = 59\cdot17 + (n-1)\cdot17$; $\Longrightarrow n = 530$;
$\mathbf{sn = 265(2\cdot59\cdot17+529\cdot17) = 2'914'735}$

35. $a_1 = 770\cdot13$; $an = 7692\cdot13 = 770\cdot13 + (n-1)\cdot13$; $\Longrightarrow n = 6923$;
$\mathbf{sn = 0{,}5\cdot6923(770\cdot13+6922\cdot13) = 380'785'769 = 3{,}80785\cdot10^8}$

oder: $a_1 = 13$ $a_{7692} = 99'996$, $s_1 = 0.5\cdot7692\cdot(13 + 99'996) = 384'634'614$

$b_1 = 13$, $B_{769} = 9997$, $s_2 = 0.5\cdot769\cdot(13 + 9997) = 3'848'845$

$s = s_1 - s_2 =$ **380´785´769**

36. a) $q = 1/5$; $an = 100\cdot(1/5)^{n-1}<10^{-50}$;$\mathbf{n = 76}$

b) $q = 5$; $an = 4/5 \cdot 5^{n-1} = 4\cdot5^{n-2} > 10^{150}$; $n-2 = (150-\lg4)/\lg5 = 213{,}7$; $\mathbf{n = 216}$

37. a) $q = 5$; $a_n = 4 \cdot 5^{n-1} > 10^{20}$; **n** (> 28.7) **= 29**

b) $s_n = 4 \cdot (5^n - 1)/4 > 10^{20}$; **n** (> 28.6) **= 29**

38. a) $an = 50 \cdot (1/5)^{n-1} < 10^{-10}$; **n = 18**

b) $sn = 50(1-0{,}2^n)/0{,}8 = 62{,}5(1 - 0{,}2^n)$; $s - sn = 62{,}5 \cdot 0{,}2^n < 10^{-20}$; **n = 32**

39. $a+aq = 24$; $aq^2+aq^3=1176$; I: $a = 24/(1+q)$ ($q \neq -1$, sonst ist I unmögl.), a in II:
$aq^2(1+q) = 1176 \implies q^2 = 49$; ==> **3, 21, 147, 1029 oder −4, 28, −196, 1372**

40. $4a+6d=300$; $a+d=aq$; $a+3d=aq^2$; II: $d = aq-a$, in I u. II : $3aq-a=150$; $3aq-2a= aq^2|:a$ ($\neq 0$!)
==> $q^2 - 3q + 2 = (q-2)(q-1) = 0$; $q = 2$: **30, 60, 90, 120;** $q = 1$: **75,75,75,75**

42. a, aq, aq^2; aF: $a-9, aq, aq^2$; gF:$a-9, aq-2, aq^2$;
aF: ==>$2aq = a-9+aq^2$(*);
gF:==>$(aq-2)^2=(a-9)\cdot aq^2$ =>$9aq^2 - 4aq + 4 = 0$ ==> $a = -4/(9q^2-4q)$ in (*)
==> $85q^2 - 44q + 4 = 0$;
$q_1 = 2/5$ ==> **25, 10, 4**; $q_2 = -2/17$ ==> **289/25, 43/25, 4/25**

43. $a_1 = 2{,}95$ (Mia); $a_{13} = 3{,}80$ (Mia) $= 2{,}95 \cdot q^{12}$ ==> $q = (380/295)^{1/12} = 1{,}0213238$;
$a_{41} = a_1 \cdot q^{40} =$ **6,82 (Mia)**

44. genau 1 L <==> $D = 0$ <==> $4b^2 - 4ac = 0$ <==> $b^2 = ac$ <==> $\mathbf{b = \pm\sqrt{(ac)}}$
<==> (an) = $\mathbf{a, \pm\sqrt{(ac)}, c}$; **mit** $\mathbf{q = \pm\sqrt{(ac)}/a = c/\pm\sqrt{(ac)} = \pm c \cdot \sqrt{(ac)}/ac}$

45. a, aq, aq^2; ==> Gl: $ax^2 + 2aqx + aq^2 = 0$; $\mathbf{D = 4a^2q^2 - 4 \cdot a \cdot aq^2 \equiv 0}$
oder: $a,b,c = z/q, z, zq$; $D = 4z^2-4z^2 \equiv 0$

46. aF: $x, x+d, x+2d$ mit $d = y-x = z-y$; aF´: $a, a+d', a+2d'$;
$a = 3x^2 + 9dx + 7d^2$; $b = 3x^2 + 6dx + 4d^2$; $c = 3x^2 + 3dx + d^2$;
I, II ==> $d' = -3dx-3d^2$; II, III ==> $d' = -3dx-3d^2$;
==> a,b,c ist aF mit $a_1 = a = 3x^2 + 9dx + 7d^2$ und $d' = -3dx-3d^2$;
oder: Beh. <==> $b-a = c-d$; ausrechnen; <==> $y-x = z-y$ (gilt nach Vorauss.)

47. Seiten: $1, q, \sqrt{1+q^2}$; ==> $q^2 = \sqrt{1+q^2}$ ==> $q^4 - q^2 - 1 = 0$;
==> $q = \sqrt{(1+\sqrt{5})/2} = 0.5 \cdot \sqrt{2(\sqrt{5} - 1)} = 1.1720$
$\tan\alpha = 1/q$ ==> $\mathbf{\alpha = 51.83°}$, $\mathbf{\beta = 38.17°}$
oder: $\tan\alpha = 1/q = \cos\alpha$ => $\sin\alpha = \cos^2\alpha$ => $\sin_{1/2}\alpha = (-1\pm\sqrt{5})/2$ etc

49. Strahlen: a, $a\sqrt{3}/2, \ldots, a(\sqrt{3}/2)^{n-1}$;

Seiten: $a/2$, $a\sqrt{3}/4$, ..., $a/2\cdot(\sqrt{3}/2)^{n-1}$; $q = \sqrt{3}/2$

==> U_n(Seiten) = $\mathbf{0.5a(1-q^n)/(1-q)}$ ----> $0,5a/(1-q)$ = $\mathbf{2a + a\sqrt{3}}$

$A_1 = a^2\sqrt{3}/8$; $q' = q^2 = 3/4$;

==> **Fn** = $a^2\sqrt{3}/8 \cdot (1-0,75^n)/0,25$ = $\mathbf{a^2\sqrt{3}/2\cdot(1-0,75^n)}$ ----> $\mathbf{a^2\sqrt{3}/2}$

50. a) $4620 = 0,5n(2\cdot 3 + (n-1)\cdot 1,5)$; $n^2+3n-6160 = 0$; **n = 77**

b) $6\cdot(2^n - 1)/(2-1) = 6138$; $2^n = 1024$; **n = 10**

51. $2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{23}$(=8´388´608); a = q = 2, n = 23; $\mathbf{s_{23} = 2(2^{23}-1)/(2-1) =}$ **16´777´214**

52. $s_5 = 2,5(2a+4d) = 40$; $s_8 = 4(2a+7d) = 100$; **d = 3; a = 2; 2, 5, 8, 11....**

53. b-a = c-b; c/b = a/c; a+b+c=3; III: $a = c^2/b$ in I & III: $2b^2 - c^2 - cb = 0$; $c^2 + b^2 + bc = 3b$;

I`+ II´ : $3b^2=3b$; b=0 => c=0 fällt weg; ==>b = 1; in I´: $c^2 + c - 2=0$; c = 1 fällt weg;

==> c = -2; **a, b, c = 4, 1, -2**

54. 1; 1+d; $\sqrt{(2+2d+d^2)} = 1+2d$ ==> $3d^2 + 2d - 1 = 0$; ($d_1 = -1$); d = 1/3;

==> 1, 4/3, 5/3 <==> 3, 4, 5!; **36,9°; 53,1°; 90°**

55. a) $a_0:b_0 = b_0:a_0/2$ => $b_0^2 = a_0^2/2$ => $b_0 = a_0/\sqrt{2}$ => $\mathbf{a_0 : b_0 = \sqrt{2}}$

b) $\mathbf{a_1 = a_0/\sqrt{2} = 0.7071\cdot a_0}$,

$\mathbf{a_2 = a_0/2 = 0.5\cdot a_0}$,

$\mathbf{a_3 = a_0/2\sqrt{2} = 0.3536\cdot a_0}$,

$\mathbf{a_4 = a_0/4 = 0.25\cdot a_0}$,

$\mathbf{a_5 = a_0/4\sqrt{2} = 0.1768\cdot a_0}$

c) $a_0\cdot a_0/\sqrt{2} = a_0^2/\sqrt{2} = 1$ => $a_0 = 2^{1/4}$;

=> $\mathbf{a_4 = a_0/4 = 2^{1/4}/4 = 29{,}7cm; \; b_4 = a_4/\sqrt{2} = 21{,}0cm; \; F_4 = 1/16 \; m^2}$

56. a = 1; $a_{100} = q^{99} = 10^3$ => $q = 10^{1/33}$; (an) = $10^0, 10^{1/33}, 10^{2/33}, .., 10^3 = 10^{99/33}$ |log

=> (bn) = 0, 1/33, 2/33, .., 99/33; $\mathbf{s_{100} = 50(0+3) = 150}$

57. a) $|an - g| = 5/(n^{0,1}+1) < \epsilon$ ==>no = $\mathbf{(5/\epsilon - 1)^{10}}$ b) no = $49^{10} = 7{,}98\cdot 10^{16}$

58. $|| < 10^{-2}$ ==> $9/(n^2-30) < \epsilon^2$ ==> $9/\epsilon^2 + 30 < n^2$. no = $\sqrt{(9/e^2 + 30)} = \sqrt{90030}$ = **300,05**

59. **no = $\mathbf{(2+\epsilon)/\epsilon}$**

60. **g = 0,5**; $|g-an| = 1/4n < 10^{-4}$; =>$\mathbf{n > n_0 = 2500}$

61. **no = 500.??**

62. a) $q = 1/5$; $a = 25$; **$s = 125/4 = 31{,}25$**

b) $\sum_{n=1}^{\infty} 25 \cdot (0{,}2)^{n-1}$

b) $s_b = 25 - 5 + 1 - 0{,}2 +-\ldots \Rightarrow q = -1/5$; $a = 25$; **$s = 125/6 = 20{,}83$**

c) $q = -101^{0{,}6666}/101 = 101^{-0{,}333} = 0{,}21473$;

$a = 101$; **$s = 101/(1+101^{-0{,}333}) = 83{,}15$**

63. a) $a = 27$; $q = 1/3$; **$s = 81/2 = 40{,}5$**

b) $a = 2{,}7$; $q = -1/3$; **$s = 81/40 = 2{,}025$**

c) $a = a$; $q = 1/b^2$ mit $|q| < 1 \Longrightarrow$ **$s = ab^2/(b^2-1)$**

d) $\sum_{n=1}^{\infty} a(b^{-2})^{n-1}$ $\sum_{n=0}^{\infty} ab^{-2k}$

e) $x = s_{15} = -12 \cdot (1 - (-3)^{15})/(1-(-3)) = -12 \cdot (1+3^{15})/4 =$ **−43´046´724**

64. a) $a = 81$; $q = 1/3$; **$s = 142/2 = 121{,}5$**

b) $a = 0{,}1$; $q = -1/2$; **$s = 2/30 = 0{,}0\overline{6}$**

65. a) $a_1 = 81$, $q = 1/3$, $s = 81(2/3) =$ **$243/2 = 121.5$**

b) $a = 100$; $q = -1/10$; **$s = 1000/11$**

c) $z = 0{,}6 + y$; $y = \Sigma 45/1000 \cdot (1/100)^{n-1}$; $y = 5/110 \Longrightarrow$ **$z = 71/110$**

66. $z = 0{,}1 + y$; $y = \Sigma 23/1000 \cdot (1/100)^{n-1} = 23/990 \Longrightarrow$ **$z = 122/990$**

67. $q = 42/63 = 2/3$; Bogen $b = 2\pi \cdot 12 \cdot \alpha / 360° = \pi\alpha/15$; $b_o = \pi \cdot 63/15$;

$b_n = (\mathbf{2} \cdot \pi \cdot 42/15) \cdot (2/3)^{n-1}$ für $n \neq 0$;

$L = b_o + s = 21\pi/5 + 84\pi/5 =$ **$21\pi = 65{,}97$**

besser: $l_1 = a+aq$, $l_2 = aq+aq^2 = l_1 \cdot q$; $a = 2\pi \cdot 63 \cdot 12/360 = 21\pi/5 \Rightarrow l_1 = 7\pi$

$L = l_1 \cdot 1/(1-2/3) = 3l_1 = 3 \cdot 7\pi$; (nur "einfach" : $L = 39{,}6$!)

68. $h_0 = 1$; $h_1 = 0{,}8 = 4/5 \cdot q = 4/5$; $h_n = (4/5)^n$; $s = h_0 + 2h_1 + 2h_2 + \ldots$

$a_1 = 8/5$; $q = 4/5$; $\Longrightarrow s = 1 + 8/5 \cdot 1/(1-4/5) =$ **9m**

oder: $s = -1 + 2(1 + 0.8 + 0.8^2 + ..) = -1 + 2(1/(1-4/5)) = -1 + 2 \cdot 5 = 9$

69. a) $V_1 = 1$; $q = 1/2 \Longrightarrow V = V_1/(1-1/2) =$ **2**

c) $h_n = 2^{-(n-1)/3}$; $h = 1/(1-2^{-1/3}) =$ **4,847**

c) $q = 2^{-2/3}$; $O_1 = 6k_1^2 - k_2^2 = 1 + (5-2^{-2/3}) \cdot 2^{-2/3}$; $O_n = (5-2^{-2/3}) \cdot (2^{-2/3})^{n-1}$;

$O = 1 + (5-2^{-2/3})/(1-2^{-2/3}) =$ **12,8**

70. a) $k_1 = 1$; $q = 1/\sqrt{2}$; $H = 1/(1-1/\sqrt{2}) = 2+\sqrt{2} =$ **3,414**
b) $V_1 = 1$; $q = (1/\sqrt{2})^3 = 1/2\sqrt{2}$; $V = 1/(1-1/2\sqrt{2}) = (8+2\sqrt{2})/7 =$ **1,547**
c) O(alle W): $O_1 = 6$; $q = 1/2$; O(alle W) = 12; Böden: $b_1 = 1$; $q = 1/2$; $B = 2$;
$O = 12 - 2\cdot 2 + 1$(unterster Boden) = **9**

71. ----

72. $5 - a_n = 10/(7 + \lg(n) = 10^{-3} \Rightarrow \lg(n) = 10^4 - 7 = 9993 \Rightarrow$ $\mathbf{n_0 = 10^{9993}}$

73. a) (Kürzen mit x; z = 4; N $\uparrow$ 0) **$-\infty$**
b) (Kürzen mit x^4) **$-7/3$**
c) (Z -> 74; N $\uparrow$ 0) **$-\infty$**
d) $(x+1)/(x-6)$ --> **5/12**
e) erw. ==> $-(\sqrt{13} + \sqrt{(x+13)}$ --> **$-2\sqrt{13}$**
f) sin7x/sin3x --> **7/3**
g) $((3+h)^3 - 3^3)/h = 27 - 9h + h^2$ --> **27**

74. a) $a = 1$; $q = 3/10$; **s = 10/7**
b) $a = 75$; $q = -3/5$; **s = 375/8 = 46,875**
c) $a = 123/10^3$; $q = 10^{-3}$; **s =** 123/999 **= 41/333**

75. $0,5 : 2 = r : (2-r) \Rightarrow r = 2/5$; $q = 2/5 : 1/2 = 4/5$
$F_1 = 0,5\pi r^2 = 0,5\cdot 4/25$; $F_2 = F_1\cdot(4/5)^2$
Ftot $= 0,5\pi\cdot 4/25\cdot 1/(1-16/25)$ **= 2π/9 = 0,698**

76. a) **$-1/6$**
b) $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)/(\sqrt{x}+1) = \sqrt{x} - 1$ -> **∞**
c) **$-\infty$**
d) $2(x+3)(x-3)/(x-3)$ --> **12**
e) $(x-5)/(x-5)(x+2)$ --> **1/7**
f) $-2/-0$ --> **∞**
g) sin4x/4x · 4/5 --> **4/5**
h) $\sin x/(x - 2\sin x) = 1/(x/\sin x - 2)$ --> $1/(1 - 2) =$ **-1**
i) $a((25 + 10h + h^2) - 25a)/h = a(10h + h^2)/h = a(10 + h)$ --> **10a**
k) $(1/h)\cdot(1/5+h - 1/5) = -1/5(5+h)$ --> **$-1/25$**

77. $|f(x) - g| = |-2/5(1+5x)|$
a) x--> +∞: $2/5(1+5x) < \epsilon \Rightarrow 2/5\epsilon - 1 < 5x \Rightarrow$ $\mathbf{(2-5\epsilon)/25\epsilon = x_0} < x$
b) x --> -∞: $-2/5(1+5x) < \epsilon \Rightarrow x <$ $\mathbf{x_0 = (-2-5\epsilon)/25\epsilon}$
c) $\epsilon = 10^{-2}$: $x_0 = 39/5 = 7,8 \Rightarrow |f(7,8)-0,4| = 0,01$, $|f(7,9)-0,4| = 0,0099 < \epsilon$

78. $y = (x^2 + 2x)/x$ allg. $y = (x^n + 2x)/x$, $n \geqslant 2$; oder z. B. $y = \sqrt{x} + 2\cdot x/x$

79. a) **0** b) **$-\infty$** c) **$-1/3$** d) **8** e) **$-\infty$** f) **1/2** g) **1**
h) ln e + ln x/sinx --> 1 + ln 1 = **1**
i) **ex n ; Oszillation**
k) $(2h(14+h))/h$ --< **28**
l) $1/(\sqrt{(7+h)} + \sqrt{7})$ --> **$1/2\sqrt{7}$**

80. a) **2**
b) $(x-1)/(x^2-1) = 1/(x+1)$ --> **1/2**
c) $(x-5)(x+15)/(x-5)$ --> **20**
d) $(1-x/3)/(-2\sqrt{}(1+5/x^2))$ --> **-1/2**
e) $\sqrt{}(\sin ax/ax \cdot a/2b)$ --> $\mathbf{\sqrt{}(a/2b)}$
f) ∞

81. $= 1/(\sqrt{k} + \sqrt{x})$ --> $1/2\sqrt{k} = 1$ ==> $\sqrt{k} = 1/2$ ==> **k = 1/4**

82. $|f(x) - g| = |(15x^2 - 60x + 60)/(3x - 6)| = |15(x-2)^2/(3(x-2)| = |5(x-2)| < 10^3$
==> $\mathbf{|x - 2| < 1/5000 = 0{,}0002}$

83. a) **-5/2**
b) $-\infty$
c) $(x - 1)/(x + 1)(x - 1) = 1/(x + 1)$ --> **1/2**
d) $(x-7)(x+3)/(x-7)$ --> **10**
e) $(1 + 3/x)/(-3\sqrt{}(1+7/x^2))$ --> **-1/3**
f) $1/(\sqrt{x} + \sqrt{7})$ --> $\mathbf{1/2\sqrt{7} = 0{,}189}$
g) **1**
h) $\sqrt{}(\sin 7x/7x \cdot 7/6)$ --> $\sqrt{}(7/\mathbf{6}) =$ **1,0801**
i) " $\sin 1/100 \cdot 0$" --> $+\infty$
k) ex n , Oszillation
l) $1 \cdot (1 - x^n)/(1-x)$ --> **1/(1-x)**

84. $|g - f(x)| = |11/(4x^2 + 2)| < \epsilon$ ==> $\mathbf{x > x_0 = 0{,}5\sqrt{}(11/\epsilon - 2)}$.

85. a) **-1/3** b) **0** c) $0.5(x^4+4)(x^2+2)$ --> **16** d) $(x+3)/(x-4)$ --> **9/2**
e) $(x-\sqrt{2})/\sqrt{2}$ --> **-2** f) $-\infty$ g) **a/2**
h) $1/(\sqrt{x} + \sqrt{b})$ --> $\mathbf{1/2\sqrt{b}}$ i) $\sqrt{0{,}5} \cdot \sqrt{}(\sin^2 x/x^2$ --> $\mathbf{1/\sqrt{2}}$**f. Wurzel nur im Zähler**

86. $|f(x) - g| = |5(x-2)^2/(2(x-2)| = 2{,}5|x-2| < \epsilon$ ==> $|x-2| <$ $\mathbf{0{,}4\epsilon = \delta}$
a) $\mathbf{\delta = 0{,}004}$ b) $\mathbf{\delta = 0{,}00004}$

87. $\lim(\pm\infty) = 1$; $\lim\uparrow 2 = -\infty$; $\lim \downarrow 2 = \infty$
As: $y = 1$: $x = 2$

88. a) $(x^2+h^2+1+2xh+2h+2x-x^2-2x-1)/h = (h^2+2xh+2h)/h$ --> **2x + 2**
b) $1/h \cdot (1/\sqrt{}(x+h) - 1/\sqrt{x}) = (\sqrt{x} - \sqrt{}(x+h))/(\sqrt{x}\sqrt{}(x+h) \cdot h) = -h/(h \cdot \sqrt{} \cdot \sqrt{} \cdot (\sqrt{} + \sqrt{}) =$
$\mathbf{-1/2x\sqrt{x}}$

89. a) $2/h \cdot (x^2 + h^2 + 1 + 2xh - 2x - 2h - x^2 + 2x - 1) = 2 \cdot (h + 2x - 2)$ --> **4x - 4**
b) $(\sqrt{} - \sqrt{})/h = (\sqrt{} - \sqrt{})(\sqrt{} + \sqrt{})/h(\sqrt{} + \sqrt{}) = (x^2 + 2hx + h^2 + 1 - x^2 - 1)/h(\sqrt{} + \sqrt{})$
$= (2x + h)/(\sqrt{} + \sqrt{})$ --> $2x/2\sqrt{} =$ $\mathbf{x/\sqrt{}(x^2+1)}$

90. $|f(x) - g| = |(6x^2 - 24x + 24)/(3x - 6)| = |6(x-2)^2/(3(x-2)| = |2(x-2)| < 10^{-3}$
==> $\mathbf{|x - 2| < 1/2000 = 0{,}0005}$

91. a) **-5/2** b) **-∞**

l) $1 \cdot (1 - x^n)/(1-x)$ --> **1/(1-x)**

92. a) **-5/2**

b) **-∞**

c) $(x - 1)/(x + 1)(x - 1) = 1/(x + 1)$ --> **1/2**

d) $(x-7)(x+3)/(x-7)$ --> **10**

e) $(1 + 3/x)/(-3\sqrt{(1+7/x^2)})$ --> **-1/3**

f) $1/(\sqrt{x} + \sqrt{7})$ --> **1/2√7 = 0,189**

g) **1**

h) $\sqrt{(\sin 7x/7x \cdot 7/6)}$ --> $\sqrt{(7/6)}$ **= 1,0801**

i) " sin1/100·0" --> **+∞**

k) ex n , Oszillation

l) $1 \cdot (1 - x^n)/(1-x)$ --> **1/(1-x)**

93. a) -1/3

b) 1/5

c) ex. nicht (Oszillation)

d) ∞

d) 1/(1-a)