Integrieren 1

1. Bestimme: a) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(2x^3 - x)\,dx$ b) $\int_{0}^{5}(x + 2)^2dx$

c) $\int_{-1}^{-2}(u^4 - u^2 + 2)\,du$ d) $\int(\sqrt{7} \cdot x^5 + \pi \cdot x^2)\,dx$

2. Berechne händisch: a) $\int_{-1}^{1}x^3dx$ b) $\int_{-2}^{2}(x^2 - 1)\,dx$ c) $\int_{-4}^{4}(-x^4 + 5x^2 - 4)\,dx$

3. Berechne von Hand (Dokumentation!) : a) $\int_{0}^{\sqrt{3}}(x^3 - 2x)\,dx$ b) $\int_{3}^{5}(x - 3)^2dx$

4. Berechne vollständig von Hand (ausführliche Dokumentation!) : a) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}3x^3dx$ b) $\int_{-2}^{2}(1 - t^4)\,dt$ c) $\int_{-3}^{0}(u^2 - 2)^2du$

5. Gib eine Stammfunktion von $g(t) = \pi\sqrt{7}(4n^2 - 25)\cdot t^{2n+4}$

6. Gib eine Polynomfunktion, die Integralfunktion von $h(u) = u+1$ ist.

7. Gib eine Stammfunktion an:

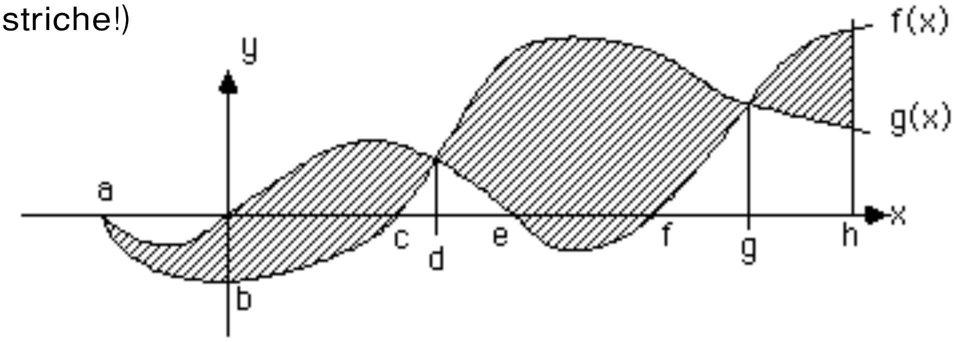
a) $y = \frac{1}{3}x^5 - 2x^3$ b) $y = 2\pi t^2 - \sqrt{3}$ c) $f(u) = -\frac{1}{u^2}$

8. Gib eine Stammfunktion von $f(x) = 0{,}25x^3$ an, die **keine** Integralfunktion von f ist.

9. Gib eine Stammfunktion an:

a) $y = \frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + 5$ b) $f(t) = 2t^2(\sqrt{3} - \pi)^3 + e$ c) $h(i) = \frac{1}{2\sqrt{i}}$

10. Schreibe einen Ausdruck auf für die Masszahl der schraffierten Fläche (ohne Betragstriche!)

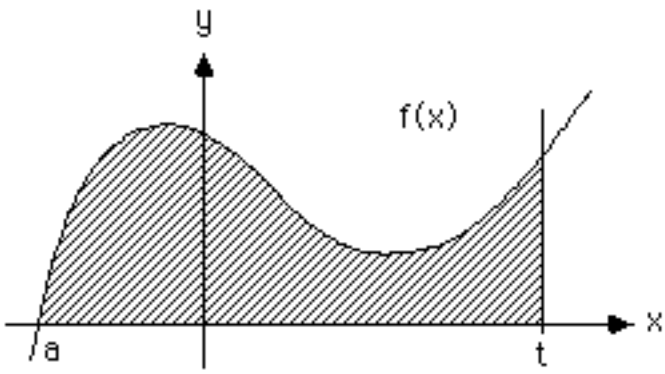


11.

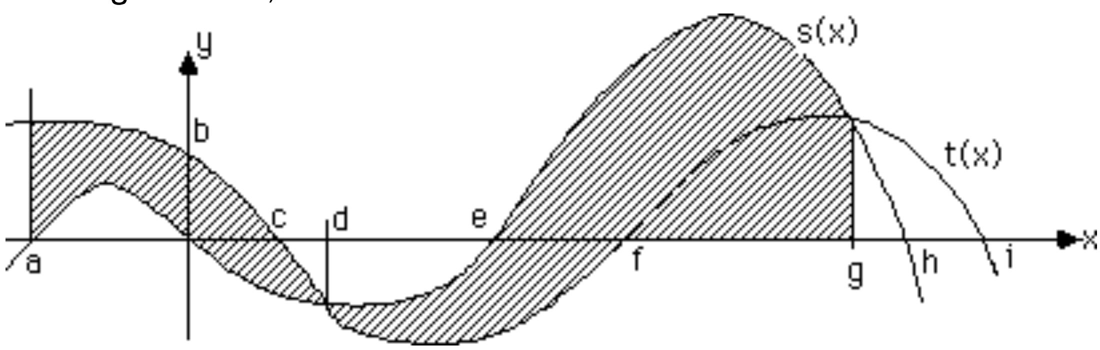
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 40$

a) Bestimme die Funktion F(t), die für jedes t > a die Masszahl der schraffierten Fläche angibt.

b) Was sagt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung über F(t) aus ?



12. Gib einen Ausdruck, der gleich der Masszahl der schraffierten Fläche ist (ohne Betragsstriche!)

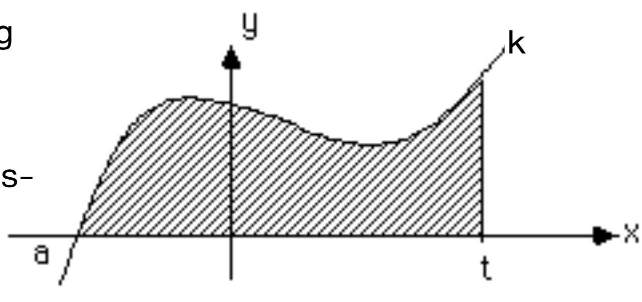


13. Gegeben: Kurve mit der Gleichung

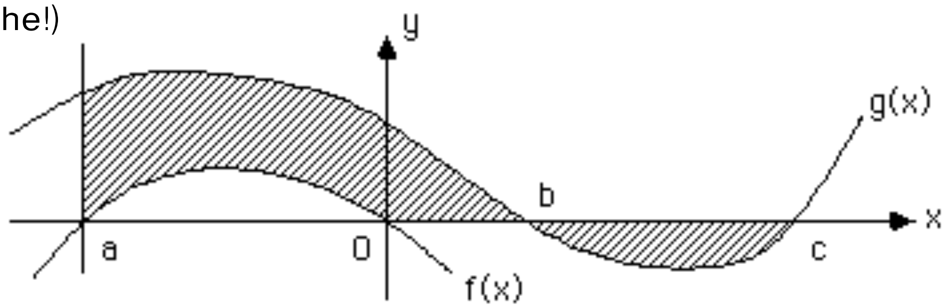
k: $y = x^3 + cx + e$

a) Gib die Gleichung der Funktion F(t) an, die für jedes t > a die Masszahl der schraffierten Fläche angibt (a, c, e sind konstant).

b) Was sagt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung über F(t) aus ?



14. Schreibe einen Ausdruck auf für die Masszahl der schraffierten Fläche (ohne Betragsstriche!)



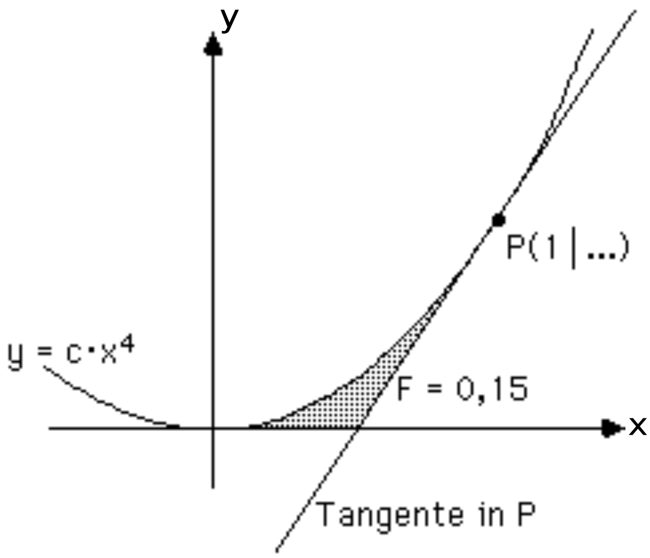
15. Beststimme die Fläche zwischen den Kurven
$y = -\frac{x^2}{3} + \frac{4}{3}x$ und $y = \frac{x^2}{3}$

16. Berechne die Fläche zwischen den Kurven $y = -x^2 - 2x + 8$ und $y = -x + 6$.

17. Bestimme die Fläche zwischen den Kurven k_1: $y = -x + 10$ und k_2: $y = -0{,}5x^2 + 4x + 2$.

18.

c = ?



19. Bestimme die Gleichung jener Ursprungsgeraden, welche die Fläche zwischen positiver x-Achse und der Kurve $y = -x^3 + 2x$ halbiert.

20. a) Bestimme Extrema und Wendepunkte des Graphen von $f(x) = 0.05x^4 - 1.2x^2 + 4$. Skizziere den Graphen für $-5 \leqslant x \leqslant 5$.

b) Bestimme die Gleichung jener Parabel 2-ten Grades, welche den Graphen in den Wendepunkten berührt.

c) Bestimme die von beiden Kurven eingeschlossene Fläche.

21. Wie lautet die Gleichung einer nach unten geöffneten, bezüglich der y-Achse symmetrischen Parabel 4-ten Grades, welche die x-Achse in P(2|...) berührt und mit der x-Achse eine Fläche vom Inhalt 1 einschliesst ?

22. Die Fläche zwischen pos. x-Achse und der Kurve $y = 2x - x^3$ wird durch eine Ursprungsgerade geteilt. Der oberhalb der Geraden liegende Teil ist 1/4 der ganzen Fläche. Wie gross ist die Steigung der Geraden ?

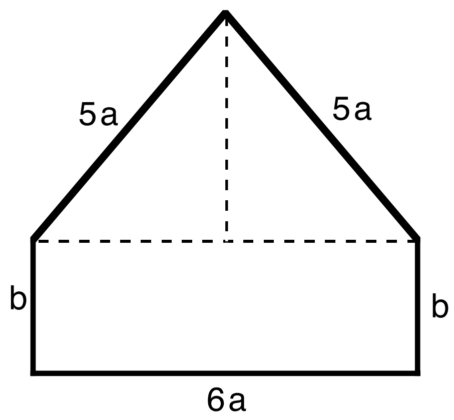
23. Wie gross sind Grundkante und Oberfläche einer geraden quadratischen Pyramide mit Seitenkante s = 1m und maximalem Volumen ?

24. Wie gross ist der Grundkreisradius des Kegels mit der Mantellinie 1m und maximalem Volumen und wie gross der Mittelpunktswinkel α des abgewickelten Kegelmantels ?

25.

Ein Versuchsfeld soll die nebenstehende Form und eine möglichst grosse Fläche haben. Ausserdem soll es mit einem 120m langen Zaun eingefasst werden können.

Wie sind a und b zu wählen ?



26. Wie lautet die Gleichung einer Parabel 3-ten Grades, die die x-Achse im Ursprung berührt und in P(6|0) schneidet und mit der x-Achse eine Fläche vom Inhalt 36 einschliesst ?

27. Die Fläche zwischen den Kurven $y = -0.5x^3$, $x = -7$, $x = -1$ und $y = 0$ wird durch die Gerade $x = k$ so zerschnitten, dass die linke Teilfläche doppelt so gross ist wie die rechte. Bestimme k.

28. Ein gerader Kreiszylinder soll die Oberfläche 12 und maximales Volumen haben. Bestimme den Grundkreisradius r und die Höhe h.

29. Die Parabel $y = 2-ax^2$ geht durch P(2|0). Der Punkt S liegt auf dem Parabelbogen zwischen dem Scheitel und P, F ist der Fusspunkt des Lotes von S auf die x-Achse. Bestimme die Koordinaten von S so, dass das Dreieck OSF maximale Fläche hat.

30. Bestimme die Fläche zwischen den Kurven $y = -x + 6$ und $y = -x^2 - 2x + 8$.

31. Die Fläche zwischen den Kurven $y = 0.2x^4$, $x = 1$, $x = 4$ und $y = 0$ wird durch die Gerade $x = k$ so zerschnitten, dass die linke Teilfläche halb so gross ist wie die rechte. Bestimme k.

32. F(x) und G(x) sind zwei Stammfunktionen von f(x). Was lässt sich über die Funktion $D(x) = F(x) - G(x)$ sagen ?

33. $f(u) = 2u^2 -4u + \pi$; $\int f(u)du = ?$

34. a) Gib eine Stammfunktion von $g(t) = \pi\sqrt{7}(4n^2 - 25)\cdot t^{2n+4}$

b) $f(u) = 2u^2 -4u + \pi$; $\int f(u)du = ?$

c) An welchen Stellen kann die Funktion $f(x) = \int_{-4}^{x} (t^3 + 5t^2 - 14t)\,dt$ Extrema haben ?

35. Begründe mit Hilfe der Definition des Integrals: $\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$

Integrieren 1 : Lösungen

1. a) $x^4 - x^2| [0; \sqrt{2}] =$ **0** b) $x^3/3 + 2x^2 + 4x |^5_0 =$ **335/3**
c) $x^5/5 - x^3/3 + 2x |^{-2}_{-1} =$ **−88/15 = −5.87**
d) $\mathbf{\sqrt{7}x^6/6 + \pi x^3/3 + C}$

2. a) $x^4/4 |^1_{-4} =$ **0** b) $x^3/3 - x |^2_{-2} = 2\cdot) | ^2_0 =$ **4/3**
c) $-x^5/5 + 5x^3/3 - 4x | ^4_{-4} = 2\cdot() |^4_0 =$ **−3424/15 = −228.27**

3. a) $x^4/4 - x^2| [0;\sqrt{3}] =$ **−3/4**
b) $x^3/3 - 3x^2 + 9x\nu^5_3 =$ **8/3**
c) $-2\cdot[x^5/5 - 2x^3/3 + 3x]^2_0 = -212/15 =$ **−14.13**

a) $\int_0^{\sqrt{3}} (x^3 - 2x)dx$ b) $\int_3^5 (x - 3)^2 dx$ c) $\int_2^{-2} (x^4 - 2x^2 + 3)dx$

4. a) $[3x^4/4]^{\sqrt{3}}_{-\sqrt{3}} = 3*9/4 - 3*9/4 =$ **0**
b) $[x - x^5/5]^2_{-2} = (2 - 32/5)-(-2 -(-32/5)) = 4 - 64/5 =$ **−44/5**
c) $[x^5/5 - 4x^3/3 + 4x]^0_{-3} = 0 - (-243/5 -(-4*27/3 + 4*(-3)) = (729 - 540 + 180)/15 =$
$369/15 =$ **123/5**

5. $\pi\sqrt{7}(4n^2-25)\cdot t^{2n+5}/(2n+5) =$ $\mathbf{\pi\sqrt{7}(2n-5)t^{2n+5}}$

6. $H(u) = 0.5u^2 + u$

7. a) $y =$ $\mathbf{x^6/18 - x^4/2 + C}$ b) $y =$ $\mathbf{2\pi t^3/3 - \sqrt{3}\cdot t + C}$

8. $I(x) = t^4/16 |^x_a = x^4/16 - a^4/16 \Rightarrow$ **F(x) = $\mathbf{x^4/16}$ + c mit c > 0**

9. a) $\mathbf{x^4/16 - 3x^3/3 + 5x + C}$ b) $\mathbf{2(\sqrt{3} - \pi)^3\cdot t^3/3 + e\cdot t + C}$
c) $\mathbf{\sqrt{i} + C}$

10. **$\int(f - g)dx$ [a;d] + $\int(g - f)dx$ [d; g] + $\int(f - g)dx$ [g; h]**

11. a) $F(t) = \int(x^3 - 6x^2 + 40)dx\ [a; t]$
$=$ $\mathbf{t^4/4 - 2t^3 + 40t - a^4/4 + 2a^3 - 40a}$
b) **F ist diff´bar und es ist F´(t) = f(t)**

12. **$\int(t - s)dx$ [a;d] + $\int(s - t)dx$ [d; f] + $\int s\, dx$ [f; h]**
= " + $\int s$ [d; h] − $\int t$ [d; f]
= $\int t - s$ [a; d] + $\int s - t$ [d; g] + $\int s - t$ [f; g] + $\int t$ [f; g] + $\int s$ [g; h]

13. a) $F(t) = {}_a\int^t f(x)dx = [x^4/4 + c\cdot x^2/2 + ex]^t_a$

$= \mathbf{t^4/4 + c\cdot t^2/2 + et - a^4/4 - a^2c/2 - ea}$

b) $\mathbf{F`(t) = t^3 + ct + e}$

14. $\mathbf{{}_a\int^b g(x)dx - {}_b\int^c g(x)dx - {}_a\int^0 f(x)dx}$

15. SP: $x^2 = -x^2 + 4x \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$

Nullst: $x_3 = 0; x_4 = 4$

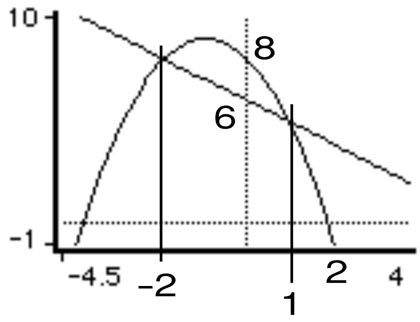
$F = 1/3\cdot {}_0\int^2(-x^2 + 4x - x^2)dx$

$= 1/3\cdot(-2x^3/3 + 2x^2)|^2_0 =$ **8/9**

16. $f(x) = -x^2 - 2x + 8$ (N:-4; 2) ; $g(x) = -x + 6$

SP: $x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_{12} = -2; 1$

$F = {}_{-2}\int^1(-x^2 - x + 2)dx = 27/6 =$ **4.5**

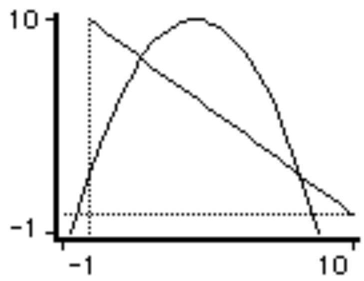


17. Nullstellen Parabel: $x = 4 \pm 2\sqrt{5}$

SP: ... $x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow x_1 = 8; x_2 = 2$

$I = {}_2\int^8(k_2(x) - k_1(x))dx$

$= -x^3/6 + 5x^2/2 - 8x |^8_2 =$ **18**



18. P(1|c); t: $m = (y - c)/(x - 1) \Rightarrow y = mx - m + c$

$f(x) = cx^4$ $f´(1) = 4c = m$

=> t: $y = 4cx - 3c$ = => $x = 3/4$ (Nullst)

=> ${}_0\int^1 f(x)dx - 0.5\cdot 0.25\cdot c = 0.15$

=> $5/5 - c/8 = 3/20$ ==> $\mathbf{c = 2}$

19. $y = -x^3 + 2x = x(-x^2 + 2)$ N: 0; $\pm\sqrt{2}$

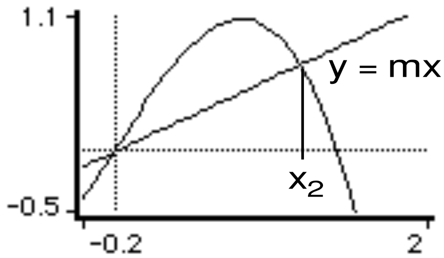
$F = \int y\, dx\ [0; \sqrt{2}] = 1$

$mx = -x^3 + 2x \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = +\sqrt{2-m}$

$\Rightarrow 1/2 = \int(y - mx)dx\ [x_1; x_2] = (2 - m)^2/4$

$\Rightarrow (2 - m)^2 = 2 \Rightarrow m = \pm\sqrt{2} + 2$

$m < 2 \Rightarrow \mathbf{m = 2 - \sqrt{2} = 0.586}$



20. a) $f'(x) = 0.2x^3 - 2.4x = x/5 \cdot (x^2 - 12)$

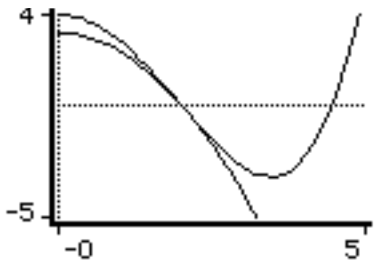
$f''(x) = 0.6x^2 - 2.4 = 3/5 \cdot (x-2)(x+2)$

$f``(0) = -2.4; f``(\pm\sqrt{12}) = 4.8$

=> $\mathbf{H(0|4);\ T_{12}(\pm 2\sqrt{3}|-16/5);}$

f'' wechelt Zeichen bei ± 2 => $\mathbf{W_{12}(\pm 2|0)}$

$(N:\pm 2;\ \pm 2\sqrt{5});$



b) $y = ax^2 + c$; W: $0 = 4a + c$

Berühren: $4a = 8/5 - 24/5 = -16/5$

=> $c = 16/5$ => **p:** $\mathbf{y = -4/5x^2 + 16/5}$

c) $F = 2 \cdot {}_0\int^2 (x^4/20 - 6x^2/5 + 4 + 4x^2/5 - 16/5)dx$

$= 2 \cdot [x^5/100 - 2x^3/15 + 4x/5]_0^{\,2} = 2(24-80+120)/75 \mathbf{= 128/75 = 1.71}$

21. $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$; $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

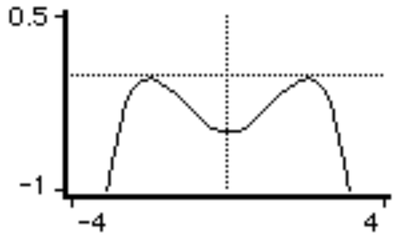
$P \in p$: $16a + 4b + c = 0$; P = Ber.Pkt: $32a + 4b = 0$

=> $-16a + c = 0$; $c = 16a$; $b = -8a$ => $f(x) = ax^4 - 8ax^2 + 16$

=> $-0.5 = {}_0\int^2 f(x)dx = 32a/5 - 64a/3$ ü $32a = 256a/15$

=> $a = -15/512 = 0.02929$

=> $\mathbf{f(x) = -15x^4/512 + 15x^2/64 - 15/32}$



einfacher: P: $y = a(x-2)^2(x+2)^2$

$= a(x^2-4)^2 = a(x^4-8x+16)...$

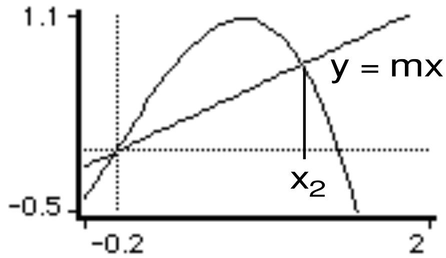
22. SP: $2x - x^3 = mx$; N:0; $\pm\sqrt{2}$

$x_1 = 0$; $x_{23} = \pm\sqrt{2-m}$

$\int f(x)dx\ [0; \sqrt{2}] = 1$

=> $1/4 = \int (f(x) - mx)dx\ [0; \sqrt{2-m}]$

=> $m^2 - 4m + 3 = (m-1)(m-3) = 0$ => $\mathbf{m = 1}$



23. $h^2 = 1 - (x\sqrt{2}/2)^2 = 1 - x^2/2$; $h'^2 = 1 - x^2/4$

$V = x^2/3 \cdot h$; $V^* = (6V)^2 = x^4(1 - x^2/2) = x^4 - x^6/2$

$V^{*\prime} = 4x^3 - 3x^5 = 0$ => $\mathbf{x = 2\sqrt{3}/3 = 1.155}$

$O = x^2 + 4 \cdot xh'/3 = 4(1 + \sqrt{2})/3 = \mathbf{3.22}$

24. $V = 1/3 \cdot \pi r^2 h$; $h = \sqrt{1-r^2}$; => $V(r) = \pi/3 \cdot r^2\sqrt{1-r^2}$

$V^*(r) = (r^2\sqrt{1-r^2})^2 = r^4 - r^6$; $V^{*\prime}(r) = 2r^3(2-3r^2)$

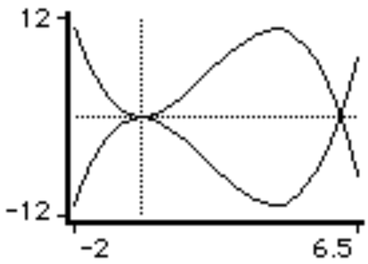
=> $\mathbf{rmax = \sqrt{2/3} = 0.816\ (m)}$

besser: $V(h) = \pi h(1-h^2)/3$; ... $h = \sqrt{1/3}$ .....

$360° : 2\pi = \alpha : 2\pi\sqrt{2/3}$ => $\mathbf{\alpha = 293.9°}$

25. $U = 16a + 2b = 120 \Rightarrow b = 60 - 8a$
$F = 6ab + 3a \cdot 4a = 6a(60 - 8a) + 12a^2$
$F(a) = 360a - 36a^2 = 36(10a - a^2)$; $F`(a) = 36(10 - 2a)$
$\Rightarrow$ **$a = 5$** $\Rightarrow$ **$b = 20$**

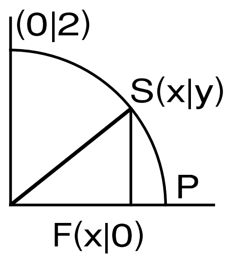
26. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $y' = 3ax^2 + 2bx + c$
$\Longrightarrow c = d = 0 \Longrightarrow y = x^2(ax + b)$; $P(6|0)$
$\Rightarrow 6a + b = 0 \Rightarrow b = -6a$
$\Rightarrow y = ax^3 - 6ax^2$;
$I = {}_0\int^6 y dx = ax^4/4 - 2ax^3|^6_0$
$= -108a = \pm 36$
$\Longrightarrow a = \pm 1/3$
$\Longrightarrow$ **$y_1 = -x^3/3 + 2x^2$; $y_2 = x^3/^3 - 2x^2$**



27. $I_1 = -x^4/8|^k_{-7} = (7^4 - k^4)/8$; $I_2 = -x^4/8|^{-1}_k = (k^4 - 1)/8$
$I_1 = 2I_2$: $7^4 - k^4 = 2k^4 - 2 \Rightarrow k^4 = 801 \Rightarrow$ **$k = -801^{1/4} = -5.320$**
oder: $-x^4/8|^{-1}_{-7} = 300 \Rightarrow I_2 = 100 = (k^4 - 1)/8$.........

28. $V = \pi r^2 h$; $o = \pi r^2 + 2\pi rh = 12 \Rightarrow h = (12 - \pi r^2)/2\pi r$
$\Rightarrow V(r) = 6r - \pi r^3/2$; $V'(r) = 6 - 3\pi r^2/2 \Rightarrow$ **$r = 2/\sqrt{\pi} = 1.128$**

29. $P: 0 = 2 - 4a \Rightarrow a = 1/2$; $y = 2 - x^2/2 = 0$
$\Rightarrow x_{12} = \pm 2$
$F = x/2 \cdot (2 - x^2/2) = x - x^3/4$;
$F' = 1 - 3x^2/4 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{4/3}$
$\Rightarrow$ **$x = 2/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}/3$**



30. $-x + 6 = -x^2 - 2x + 8 \Rightarrow x_1 = 1$; $x_2 = -2$;
$\pm F = {}_{-2}\int^1(-x^2 - x + 2)dx = | -x^3/3 - x^2/2 + 2x|^1_{-2} =$ **4.5**

31. $2 \cdot \int x^4/5 \, dx \, [1;k] = \int x^4/5 \, dx \, [k;4]$
$\Rightarrow 2(k^5 - 1)/25 = (4^5 - k^5)/25 \Rightarrow k^5 = 342$
$\Rightarrow$ **$k = 342^{1/5} = 3.212$**

32. **$D(x) = c =$ konstant**

33. **$2/3 \cdot u^3 - 2u^2 + \pi u$**

34. a) $\pi\sqrt{7}(4n^2-25) \cdot t^{2n+5}/(2n+5) =$ **$\pi\sqrt{7}(2n-5)t^{2n+5}$**
b) **$2u^3/3 - 2u^2 + \pi u + C$**
c) $f'(x) = x(x+7)(x-2) = 0 \Rightarrow$ **$x \in \{-7, 0, 2\}$**

35. $\int cf(x)dx = \lim \Sigma_{i=1}^{n} c \cdot f(x)\Delta x = \lim c \cdot \Sigma_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = c \cdot \lim \Sigma_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$
$= c \cdot \int f(x)dx$