Numerische Methoden

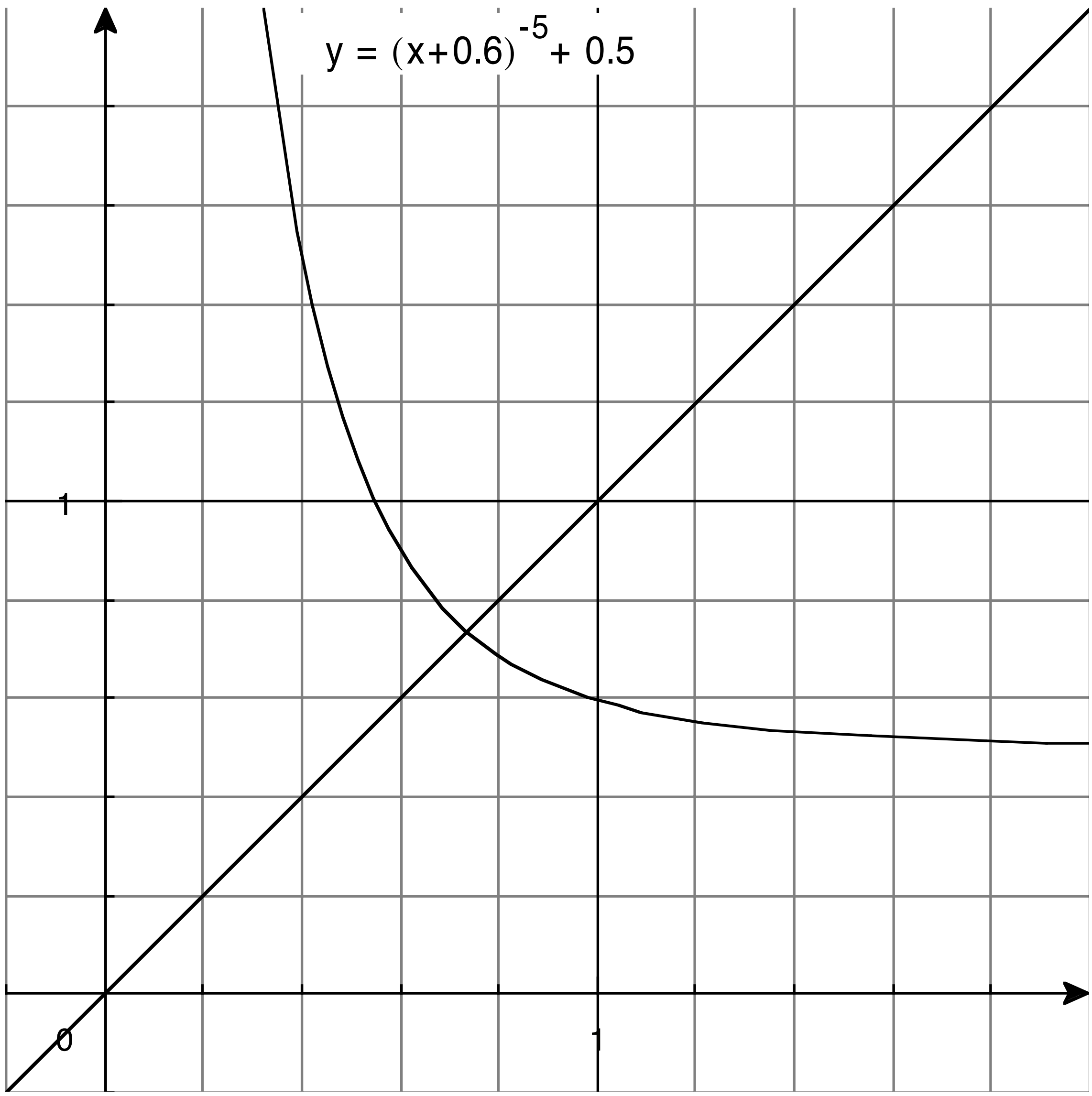
1. Löse die Gleichung $x^3 - 5 = 0$ mit dem Bisektionsverfahren.
Startwerte: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$; 4 Iterationsschritte.

2. Bestimme eine Nullstelle der Funktion $f(x) = 3 \cdot \sin(x) - x$ mit dem Sekantenverfahren. Startwerte: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$; 2 Iterationsschritte.

3. Wie 2., aber mit der Regula falsi

4. a) Bestimme $\sqrt{2}$ mit dem Newtonverfahren (Löse: $x^2 = 2$), Startwert: $x_1 = 1$; 3 Iterationsschritte.
b) Gib die prozentuale Abweichung der gefundenen Näherung vom "genauen" Wert an.
c) Warum stehen bei b) Anführungszeichen?

5. Fixpunktmethode: Startwert $x_0 = 0.4$. Suche **graphisch** $x_1, \ldots x_5$. Schreibe die gefundene Näherung x_5 auf und gib die Funktion f(x) an, für die x_5 näherungsweise eine Nullstelle ist.



6. Löse die Gleichung $2x - \cos x = 0$ rechnerisch mit dem Fixpunktverfahren. Startwert: $x_0 = 1$; 8 Schritte (alle Schritte dokumentieren). Prüfe die gefundene Näherung durch Einsetzen.

7. Löse: $x^3 + x - 5 = 0$ (alle Schritte dokumentieren)

a) mit Bisektion: $x_0 = 1$, $x_1 = 2$,; 3 Schritte
b) mit dem Sekantenverfahren: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$; 3 Schritte
c) mit der Regula Falsi: $x_0 = 1$, $x_1 = 2$; 3 Schritte
d) mit dem Newtonverfahren: $x_0 = 1$; 3 Schritte

8. Bestimme: a) $\int x \cdot \cos(x)\,dx$ b) $\int_{-1}^{0} x^2 \cdot e^{-x}\,dx$ (Tipp: 2 mal part. integrieren)

9. Leite aus der Formel:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + f''(0) \cdot \frac{x^2}{2!} + f'''(0) \cdot \frac{x^3}{3!} + \ldots + f^{(n)}(0) \cdot \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

die ersten 5 substanziellen Glieder der Potenzreihen für $f(x) = \sin(x)$ her.

10. Entwickle die Funktion $f(x) = \ln(x + 1)$ in eine Potenzreihe und gib die ersten 5 substanziellen Summanden sowie den allgemeinen Summanden an. Bestimme mit deiner Lösung die Zahl $\ln(1.1)$ auf 3 signifikante Ziffern.

11. Bestimme:

a) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ b) $\int e^{-t} \cdot \sin(2t)\,dt$ (Tipp: 2 mal part. integrieren)

12. a) Entwickle $f(x) = (1 + x)^k$ in eine Potenzreihe. Gib die ersten 4 Summanden sowie den allgemeinen Summanden an.
b) Bestimme mit dem Resultat von a) die ersten 6 Summanden für $k = 1/3$.
c) Bestimme mit dem Resultat von b) eine Näherung für $\sqrt[3]{1.5} = \sqrt[3]{1 + 0.5}$.
d) Gib die prozentuale Abweichung dieser Näherung vom "genauen" Wert, den der TR liefert.

13. Bestimme von der Potenzreihe von $f(x) = \ln(1 - x)$ die ersten 6 signifikanten Summanden und berechne damit eine Näherung für $\ln(0.9)$.

Numerische Methoden : Lösungen

1. 1) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ => $\mathbf{x_3 = 1.5}$; $y_1 = -4$, $y_2 = 3$, $y_3 = -1.625$; x_1 fällt weg
2) $x_1 = 1.5$, $x_2 = 2$ => $\mathbf{x_4 = 1.75}$; $y_1 = -1.625$, $y_2 = 3$, $y_3 = 0.359$; x_2 fällt weg$_6$
3) $x_1 = 1.5$, $x_2 = 1.75$ => $\mathbf{x_5 = 1.625}$; $y_1 = -1.625$, $y_2 = 0.359$, $y_3 = -0.708$; x_1 f.w.
4) $x_1 = 1.625$, $x_2 = 1.75$ => $\mathbf{x_3 = 1.6875}$; $y_1 = -0.708$, $y_2 = 0.359$, $y_3 = -0.194$; x_1 f.w.

2. 1) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $y_1 = 0.727$, $y_2 = -2.57$, $\mathbf{x_{neu} = 2.220}$**,** x_1 weglassen
2) $x_1 = 3$, $x_2 = 2.220$, $y_1 = -2.57$, $y_2 = 0.1689$, $\mathbf{x_{neu} = 2.2682}$

3. 1) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $y_1 = 0.727$, $y_2 = -2.57$, $\mathbf{x_{neu} = 2.220}$**,** $|y_1| < |y_2|$ => x_2 weglassen
2) $x_1 = 2$, $x_2 = 2.220$, $y_1 = 0.727$, $y_2 = 0.1689$, $\mathbf{x_{neu} = 2.2868}$

4. a) $f(x) = x^2 - 2$. $f'(x) = 2x$, $x_1 = 1$; $x_{neu} = x_{alt} - f(x_{alt})/f'(x_{alt})$
1) $x_2 = 1 - (-1)/2 = 3/2$
2) $x_3 = 3/2 - (9/4 - 2)/3 = 3/2 - 1/12 = 17/12$
3) $x_4 = 17/12 - ((17/12)^2 - 2)/(17/6) = 577/408 = \mathbf{1.414215686}$
b) **0.00015%**
c) Der "genaue" Wert ist selber eine Näherung des TR.

5. ----

6. ----

7. $x = 1.5159802277$

8. a) $x\cdot\sin x - \int \sin x\,dx = \mathbf{x\cdot\sin x + \cos x + C}$
b) $\int x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x} - (-2)\int xe^{-x}dx = -x^2e^{-x} + 2(-xe^{-x} - (-1)\int e^{-x}dx))$
$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - e^{-x} = \mathbf{-e^{-x}(x^2 + 2x + 2)}$
==> $\int_{-1}^{0} x^2e^{-x}dx = [-e^{-x}(x^2 + 2x + 2)]_{-1}^{0} = -1\cdot 2 + e\cdot 1 = \mathbf{e - 2}$

9. Ableitungen: cosx, -sinx, -cosx, sinx, da capo
$f(x) = \sin(0) + \cos(0)\cdot x - \sin(0)\cdot x^2/2! - \cos(0)\cdot x^3/3! + \sin(0)\cdot x^4/4! + \cos(0)x^5/5! - \sin(0)\cdot x^6/6! - \cos(0)\cdot x^7/7! + \sin(0)\cdot x^8/8!$ etc
=> $\mathbf{\sin(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + x^9/9! -+....}$

10. $f(x) = \ln(x+1)$, $f'(x) = (x+1)^{-1}$, $f''(x) = -(x+1)^{-2}$, $f'''(x) = 2(x+1)^{-3}$,
$f^{(4)}(x) = -2\cdot 3(x+1)^{-4}$, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(x+1)^{-n}$
=> $\ln(x+1) = \ln(1) + 1\cdot x - x^2/2! + 2\cdot x^3/3! - 2\cdot 3\cdot x^4/4! + - \ldots + (-1)^{n-1}(n-1)!x^n/n!$
$= \mathbf{x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + x^5/5 - + \ldots \; (-1)^{n-1}x^n/n}$
=> $\ln(1.1) = \ln(0.1+1) = 0.1 - 0.005 + 0.0003333 - 0.000'025 = 0.095308 = \mathbf{0.0953}$

11. a) $\ln^2(x) / 2$ b) $-e^{-t}/2\,(2\cos 2t + \sin 2t)$

12. ----

13. ----