

Konstruktionen mit Kreisen

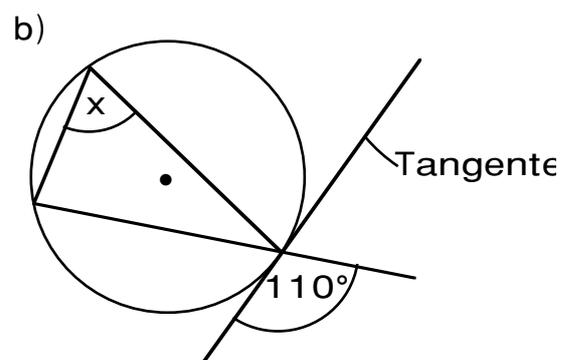
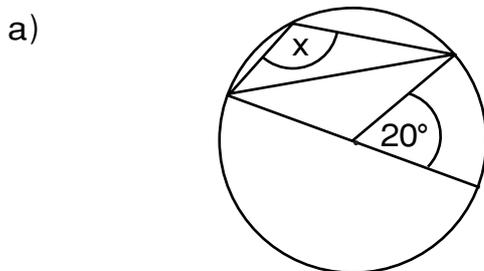
Kreis und Gerade

1. Gegeben: $k(M|5)$; Punkt P mit $\overline{MP} = 4$.
Konstruiere Sehnen der Länge 8 durch P (**mit KB**).
2. Gegeben: $k(M|4)$; $P \in k$, $Q \in k$ mit $\overline{PQ} = 5$.
Gesucht: Kreis durch P **und** Q , der k unter dem Winkel $\alpha = 60^\circ$ schneidet.
(Der Schnittwinkel zweier Kreise ist der Winkel zwischen den Tangenten in einem der beiden Schnittpunkte.) (**mit KB**)
3. Gegeben: $k(M|4)$; $P \in k$.
Gesucht: Kreis durch P mit Radius $R = 7$, der k unter dem Winkel $\alpha = 60^\circ$ schneidet.
(Der Schnittwinkel zweier Kreise ist der Winkel zwischen den Tangenten in einem der beiden Schnittpunkte.) (**mit KB**)
4. Gegeben: $k(M|4)$; Punkt P mit $\overline{MP} = 6$.
Gesucht: Sekanten durch P , von denen k Sehnen der Länge 3 ausschneidet (**mit KB**).
5. Gegeben: Geraden g und h mit $\sphericalangle(g,h) = 60^\circ$.
Gesucht: Kreise mit Radius $r = 2,5$, die g berühren und aus h Sehnen der Länge 4 ausschneiden (**mit KB**).
6. Gegeben: Gerade g , Punkt P mit $\overline{Pg} = 2$.
Konstruiere Kreise mit Radius 4, die durch P gehen und aus g Sehnen der Länge 4 ausschneiden (**mit KB**).
7. Gegeben: $k(M|9)$, Gerade g .
Gesucht: Kreise mit Radius 2, die k und g berühren. Unterscheide alle verschiedenen Fälle und gib jeweils die Anzahl der Lösungen an (**keine** Konstruktionen, **kein KB**, **nur** Handskizzen).
8. Gegeben: $k(M|3)$, Punkt P mit $\overline{MP} = 5,5$.
Gesucht: Kreise mit Radius $r = 2$, die k berühren und durch P gehen (**mit KB**).
9. Gegeben: $k(M|4)$, Gerade g mit $\overline{Mg} = 3$.
Gesucht: Kreise mit Radius $r = 1.5$, die k und g berühren (**kein KB**).

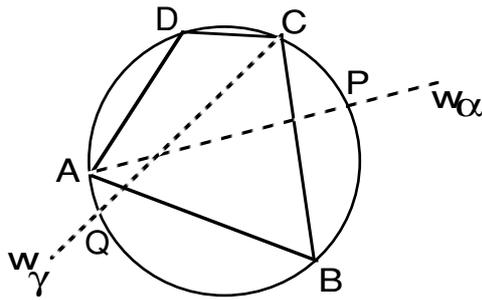
10. Gegeben: $k(M|2)$, Gerade g mit $\overline{Mg} = 3$,
 Gesucht: $k'(M'|6)$ so, dass sich k und k' berühren und $M' \in g$
 (nur KB mit genauer Anzahl der Lösungen).
11. Gegeben: $k_1(M_1|4)$ und $k_2(M_2|1,5)$ mit $\overline{M_1M_2} = 7$. Konstruiere die äusseren gemeinsamen Tangenten. (kein KB).
 Gib die Länge eines Tangentenabschnittes an.
12. Gegeben: $k_1(M_1 | 3)$ und $k_2(M_2 | 1.5)$ mit $\overline{M_1M_2} = 7$. Konstruiere die gemeinsamen inneren Tangenten und miss einen Tangentenabschnitt t .
 (kein KB)
13. Gegeben: Strecke MP mit $\overline{MP} = 10\text{cm}$.
Konstruiere die Tangenten von P an $k(M | 4\text{cm})$. (kein KB)
Berechne a) die Länge x eines Tangentenabschnittes
 b) die Länge a der Sehne zwischen den Berührungspunkten.
14. Geg: Kreis $k_1(M_1 | 2)$; Tangente t an k_1 in B_1 .
 Ges: Kreis(e) $k_2(M_2 | r_2)$ so, dass t auch k_2 berührt (Berührungspunkt B_2) und
 $\overline{M_1M_2} = 3$ und $\overline{B_1B_2} = 2.5$ (nur KB für die Konstruktion von M_2)

Kreis und Winkel

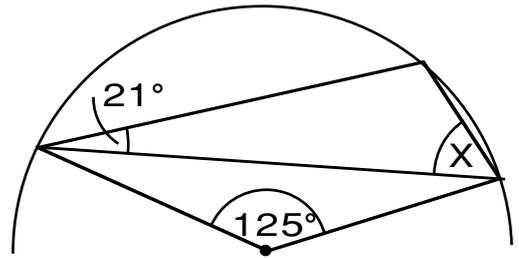
15. **Berechne** x . (Hilfsgrössen anschreiben. Ausrechnung angeben)



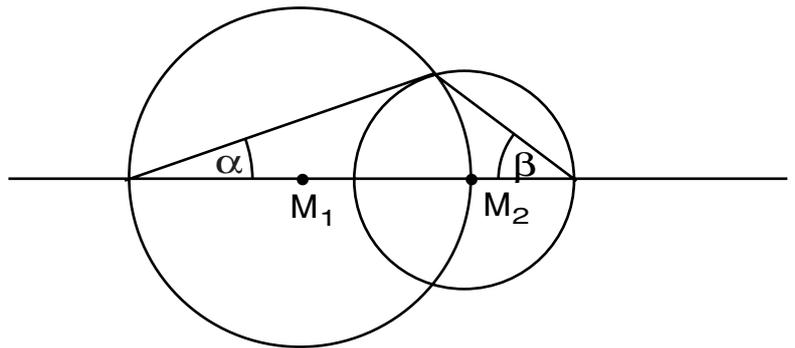
16. a) Beweise: PQ ist ein Durchmesser
 Tip: Zeichne DP, DQ und DB



- b) $x = ?$

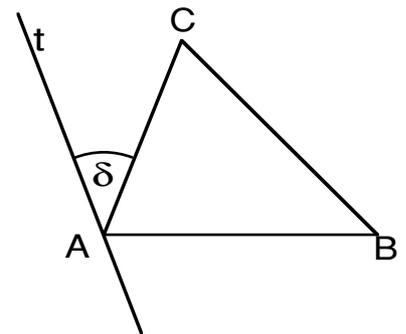


17. $\alpha = 28^\circ; \beta = ?$

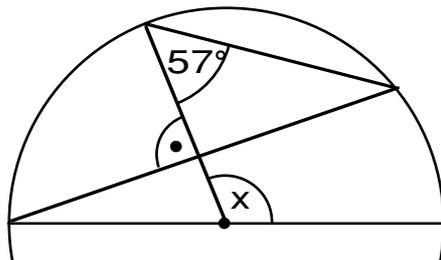


18. $\alpha = 70^\circ; \gamma = 45^\circ$,
 t: Tangente an Umkreis

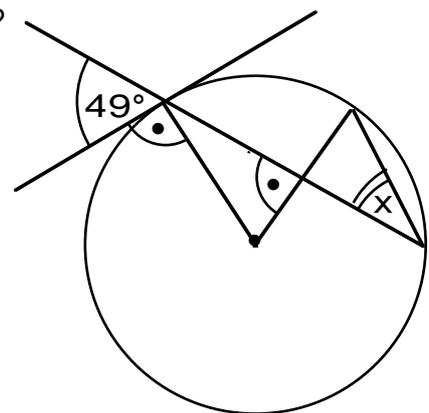
- a) $\delta = ?$
 b) Begründung ?



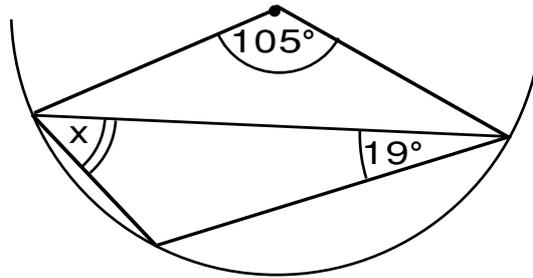
19. a) $x = ?$



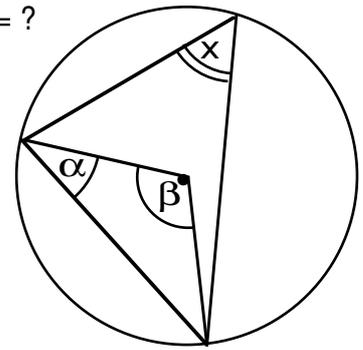
- b) $x = ?$



20. a) $x = ?$



b) $\beta = 3\alpha; x = ?$



21. Konstruiere ein Dreieck aus $h_c = 3,5; \beta = 53^\circ; b = 4,5$; (**mit KB**); (a).

22. Gegeben: Strecke AB mit $\overline{AB} = 5$.

Gib die Menge aller Punkte P an, für die gilt: $\overline{AP} = \overline{BP}$ und $30^\circ \leq \sphericalangle APB \leq 90^\circ$ (**nur Konstruktion, kein KB**).

23. Gegeben: Strecke XY mit $\overline{XY} = 6$,

Gesucht: Alle Punkte P mit $\overline{PX} \geq \overline{PY}$ und $\overline{PY} > 5$ und $\sphericalangle XPY > 50^\circ$;
(**kein KB**).

24. **Nur KB**: Konstruiere ein Viereck aus $d = 3,1; e = 7,8; f = 6,0; \alpha = 35^\circ; \gamma = 58^\circ$.

25. Paula (P), Quinta (Q) und Rosa (R) heissen drei Funkfeuer, die in dieser Reihenfolge an der schnurgeraden Küste von Maltempo liegen und zwar im Abstand von je 20 Seemeilen (sm). Das Schiff Sanamare (S) peilt in dickem Nebel die Funkfeuer an und misst: $\sphericalangle PSQ = 90^\circ, \sphericalangle QSR = 30^\circ$. Wie weit ist Sanamare von Quinta entfernt? (**nur Konstruktion in geeignetem Massstab**)

26. Konstruiere ein Dreieck aus $s_b = 4,7; h_a = 3,8; \alpha = 77^\circ$; (a). (**mit KB**)

27. In einem Kreis mit Durchmesser $d = 6$ liegt eine Sehne der Länge 3. Wie gross sind die Umfangwinkel über dieser Sehne?
(**Antwort begründen, keine Konstruktion**)

28. Geg: A, B mit $\overline{AB} = 6$.

Ges: **alle** Punkte P mit $\overline{AP} > \overline{PB}$ und $\overline{PB} \leq 4$ und $\sphericalangle APB \geq 70^\circ$. (**kein KB**)

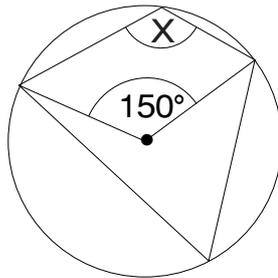
Kreis und Viereck

29. Konstruiere ein Sehnenviereck aus $c = 3$; Umkreisradius $r = 4$; $f = 7,7$;
 $\beta = 75^\circ$. (**mit KB**)

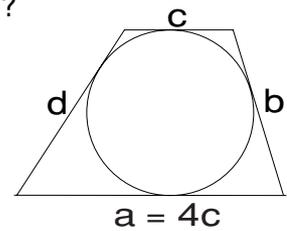
30. **Nur KB**: Konstruiere ein Tangentenviereck aus $a = 6; b = 4,2; c = 4,5; e = 7$.

31. Konstruiere ein Sehnenviereck aus $a = 5,5$; $r = 3$; $\gamma = 115^\circ$; $\delta = 100^\circ$; (d).
(mit KB)
32. Konstruiere ein Tangentenviereck aus $b = 9,0$; $f = 9,4$; Inkreisradius $\rho = 3,2$; $\beta = 75^\circ$; (c). (mit KB)
33. Beweise: In einem Trapez mit Umkreis sind zwei Winkel gleich.
34. Beweise: Hat ein gleichschenkliges Trapez einen Inkreis, so ist jeder Schenkel gleichlang wie die Mittelparallele.

35. a) $x = ?$



b) Trapezumfang: $u = 75$;
 $a = ?$; $b+d = ?$



36. Konstruiere ein Tangentenviereck aus $b = 6$; $c = 5$; $\beta = 78^\circ$; $\gamma = 57^\circ$ (a).
(mit KB)
37. Konstruiere ein Sehnenviereck aus b, d, γ, r (nur KB).
38. Konstruiere ein Tangentenviereck aus $a = 6$; $b = 4$; $c = 5$; $e = 7$; (δ). (mit KB)

Konstruktionen mit Kreisen: Lösungen

1. KB: 1. bel Sehne AB mit $\overline{AB} = 8$; 2. Mittelsenkr. $\rightarrow D$; 3. Tangenten von P an $k(M|MD)$
(oder: 2. $k(M|MP) \cap AB \rightarrow X_{1,2}$; 3. AB mit $R(M; \sphericalangle PMX_{1,2})$ abb. $\rightarrow 2L$)
2. KB: 1. t_1 in P; $\alpha = 60^\circ \rightarrow t_{2,3}$; 2. Lot auf $t_{2,3}$ in $P \cap$ Mittelsenkr. von PQ $\rightarrow M_{2,3}$
3. KB: 1. t_1 in P; $\alpha = 60^\circ \rightarrow t_{2,3}$; 2. Lot auf $t_{2,3}$ in $P \cap k(P|7) \rightarrow M_{1,2,3,4}$
4. KB: 1. bel Sehne AB mit $\overline{AB} = 3$; 2. $k(M|MP) \cap (AB) \rightarrow Q, Q'$;
3. AB um M drehen mit $\varphi = \sphericalangle QMP$ ($\sphericalangle Q'MP$)
(oder: 1.... \rightarrow Mittelpunktsabstand x; 2. Tangenten von P an $k(M|X)$)
5. KB: 1. Auf g A, B mit $\overline{AB} = 4$; 2. $k(A|r) \cap k(B|r) \rightarrow S_1, S_2$; 3. \parallel en durch $S_{1,2}$ zu h mit \parallel enpaar zu g im Abstand r schneiden $\rightarrow M_{1,2,3,4}$
6. KB: 1. XY mit $\overline{XY} = 4$ auf g; 2. $k(X|4) \cap k(Y|4) \rightarrow C$; 3. $k(P|4) \cap \parallel e$ zu g durch C $\rightarrow M_1, M_2 \rightarrow k(M_{1,2}|4)$
7. $\overline{Mg} = a$; $a > 9+2 \cdot 2 = 13 \Rightarrow 0L$; $a = 13 \Rightarrow 1L$; $9 < a < 13 \Rightarrow 2L$; $a = 9 \Rightarrow 4L$;
 $9-2 = 7 < a < 9 \Rightarrow 6L$; $a = 7 \Rightarrow 7L$; $0 < a < 7 \Rightarrow 8L$
8. KB: $k(M|3+2) \cap k(P|2) \rightarrow S_{1,2} \rightarrow k(S_{1,2}|2)$
9. \parallel enpaar zu g im Abstand 1,5 $\cap k_{1,2}(M|4 \pm 1,5) \rightarrow M_1, \dots, M_6$
10. KB: $k(M|6 \pm 2) \cap g \rightarrow M'_1, \dots, M'_4$ (2 berühren k umfassend, 2 von aussen)
11. Hilfskreis $k(M_1 | r = 4 - 1.5)$, Tangenten von M_2 an k (Thaleskreis),
Berührradien, Tangenten \parallel verschieben. $t = 6,5$
12. Hilfskreis $k(M_1 | r = 4 + 1.5)$, Tangenten von M_2 an k (Thaleskreis),
Berührradien, Tangenten \parallel verschieben. $t = 6,5$. $t = 5,4$
13. Bem: Zur Berechnung von x und a sind die Sätze über das rechtwinklige
Dreieck nötig (Sätze von Pythagoras und Euklid)
 $x = \sqrt{84} = 9.17$; $4^2 = 10 \cdot q$; $q = 16/10$;
 $h^2 = 16/10 \cdot 84/10 = 4^2 - (16/10)^2 = 1344/100$
 $\Rightarrow h = 4/5 \cdot \sqrt{21} \Rightarrow a = 2h = 8/5 \cdot \sqrt{21} = 7.33$
14. 1. auf t 2.5 abtragen $\Rightarrow B_2$
2. Lot zu t durch $B_2 \cap k(M_1 | 3) \Rightarrow M_{21}, M_{22}$
15. a) $x = 0,5 \cdot (180^\circ + 20^\circ) = 100^\circ$ b) $x = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$

16. a) $\sphericalangle PDB = \alpha/2$; $\sphericalangle QDB = \gamma/2 \Rightarrow \delta = (\alpha+\gamma)/2 = 90^\circ$ (Sehnen4-Eck) $\Rightarrow \sphericalangle QMP = 2 \cdot 90^\circ$
 b) $x = 180^\circ - 21^\circ - (360^\circ - 125^\circ)/2 = 180^\circ - 21^\circ - 117,5^\circ = 41,5^\circ$
17. $\alpha + 2\beta$ (Aussen \sphericalangle bei M_2) $= 90^\circ$ (Thaleskreis um M_1); $\beta = 45^\circ - \alpha/2 = 31^\circ$
18. a) $\delta = \beta = 180^\circ - 70^\circ - 45^\circ = 65^\circ$ b) δ ist Sehnentangentenwinkel zu β
19. a) $x = 180^\circ - x'$; $x' = 2 \cdot (90^\circ - 57^\circ)$ (Satz v. Umfang \sphericalangle) $\Rightarrow x = 2 \cdot 57^\circ = 114^\circ$
 b) \sphericalangle bei $M = 49^\circ$ (halber Mittelpkt \sphericalangle zu sehnentg \sphericalangle 49°) $= 2x$ (x ist Umfang \sphericalangle über gleicher Sehne) $\Rightarrow x = 24,5^\circ$
20. a) $\alpha = (360^\circ - 105^\circ)/2 = 127,5^\circ$; $x = 180^\circ - 19^\circ - 127,5^\circ = 33,5^\circ$
 b) $90^\circ = \alpha + \beta/2 = \alpha + 3\alpha/2 = 5\alpha/2 \Rightarrow \alpha = 36^\circ$; $x = \beta/2 = 3\alpha/2 = 54^\circ$
21. KB: Thaleskreis über $b \cap k(C|h_C) \rightarrow H_C$; 2. $(AH_C) \cap$ Ortsbogen für β über $b \rightarrow$ B.
 (oder 2. β auf Verl. von (AH_C) abtragen und \parallel durch C versch. \rightarrow B). $a = 4,4$; $c = 5,6$
22. Halbmonde zu $30^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ über $AB \cap$ Mittelsenkr. zu $AB \rightarrow s_{1,2} \approx 6,9$
23. 2 Kurvendreiecke aus Mittelsenkr. m zu XY , Ortsbogen für 50° und $k(Y|5)$; alle Punkte von m im Zweieck gehören zu \mathbb{L} , ausser die Endpunkte.
24. KB: 1. $\triangle ABD$ (Ssw) $= (f,d,\alpha)$ 2. Fasskreis für γ über $BD \cap k(A|e) \rightarrow C_{12}$;
 C_1 : einspringende Ecke D;
 C_2 : überschlagenes 4-Eck; $b = 6,9$; $a = 8,2$; $c = 4,9$
25. z.B 1sm \sim 2mm; 2 Fasskreise schneiden \rightarrow S mit $\overline{QS} = 13,1$ sm
26. KB: 1. Streifen der Breite h_a mit Mittel||e m ;
 2. B bel. auf Rand; 3. $k(B|s_b) \cap m \rightarrow M_b$;
 4. Bogen über s_b für $\alpha \cap$ Streifen $\rightarrow A, A'$. $a = 7,4$; $a' = 5,9$; $b = 7,1$; $b' = 5$
27. $\triangle ABM$ gls. $\Rightarrow \sphericalangle AMB = 60^\circ \Rightarrow$ Umfang $\sphericalangle = 30^\circ$ oder 150° .
28. Mittelsenkrechte m von AB , $k(B, 4)$. Fasskreis für 70° über AB .
 Alle Punkte auf der Seite von m , auf der B liegt und die auf oder innerhalb beider Kreise liegen.
29. KB: 1. $\triangle MCD$ (sss), Umkreis k ; 2. $\delta = 180^\circ - \beta$ in D $\rightarrow A$; 3. $k \cap k'(D|f) \rightarrow B_{1,2}$
30. KB: 1. $\triangle ABC$ (sss); 2. $k(C|c) \cap k'(A|a+c-b) = 6,3) \rightarrow D$
31. KB: 1. $\triangle ABM$ (sss), Umkreis k ; 2. $\alpha = 180^\circ - \gamma$ in A $\cap k \rightarrow D$;
 3. ebenso für $\beta = 180^\circ - \delta \rightarrow C$; $d = 4,5$; $b = 3,3$; $c = 3,1$

- 32.** KB: 1. BC, β, w_β ; 2. $\parallel e$ zu b im Abstand $\rho \cap w_\beta \rightarrow M$, Inkreis k ;
 3. Tangente von C an $k \cap k'(B|f) \rightarrow D$. 4. Tangente von D an $k \cap \uparrow a \rightarrow A$. $c = 8,0$
- 33.** Vor.: $ABCD$ Sehnenviereck; $AB \parallel CD$. Beh.: $\alpha = \beta$
 Bew.: $\beta + \delta = 180^\circ$ (Sehnenviereck); $\delta = 180^\circ - \alpha$ (\sphericalangle an \parallel en)
 $\Rightarrow \beta + 180^\circ - \alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = \beta$.
- 34.** Vor.: $ABCD$ ist Tangentenviereck (Berührungspunkte von a, b, c, d : E, F, G, H); $AB \parallel CD$; $\overline{AD} = \overline{BC}$. Beh.: $m = \overline{AD}$
 Bew.: $m = (a+c)/2 = a/2 + c/2 = \overline{AE} + \overline{DG} = \overline{AH} + \overline{DH} = \overline{AD}$
- 35.** a) $x' = 150^\circ/2 = 75^\circ$; $x = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$ (oder: $x = (360^\circ - 150^\circ)/2$)
 b) $a+c = u/2 = 37,5 = 5c$; $c = 7,5$; $a = 30$; $b+d = u/2 = 37,5$
- 36.** KB: 1. $b, \beta, \gamma, c \rightarrow B, C, D$; 2. $w_\beta \cap w_\gamma \rightarrow M$; 3. Berührradien \rightarrow Berührungspkte F, G ;
 Inkreis k
 4. $k \cap k'(D|DG) \rightarrow H$ (oder Thaleskreis über MD); 5. $(DH) \cap a \rightarrow A$; $a = 3,6$; $d = 2,6$.
- 37.** KB: 1. $\triangle BCM$ (sss), Umkreis k ; 2. γ in C an b ; 3. fr.Sch. $\gamma \cap k \rightarrow D$; 4. $k \cap k'(D|d) \rightarrow A_{1,2}$
 Fallunterscheidung: $d \leq \overline{DB} : 1L$; $\overline{DB} < d < 2r : 2L$; $d = 2r : 1L$; $d > 2r : 0L$
- 38.** KB: 1. $\triangle ABC$ (SSS); 2. $d = a+c-b$; 3. $k(C|c) \cap k'(A|d) \rightarrow D$. $\delta = 69^\circ$