Ähnlichkeit

Zentrische Streckung

1. In einem rw. Dreieck mit Umfang 120cm verhalten sich die Katheten wie 8 : 15. Wie lang ist die Hypotenuse ?

2. a : b = 4 : 5 ; b : c = 7 : 8 . a : b : c = ? (ganze Zahlen!)

3. Die Horizontalentfernung zweier Punkte auf einer schnurgeraden Skipiste beträgt 400m, die Steigung 75%.
a) Höhenunterschied der beiden Punkte ?
b) Pistenlänge ?
c) Winkel zwischen Piste und Horizontale, wenn die Steigung 100% ist ?

4. Zeichne ein Dreieck aus a = 4, b = 5, c = 6. Strecke das Dreieck mit Zentrum H (=Höhenschnittpunkt) und Streckfaktor k = -2.

5. Im Kreis k(M|2) ist die Sehne AB mit $\overline{AB}$ = 3 gegeben. Strecke die ganze Figur mit Z(P|-2). Der Punkt P liegt auf (MA) mit $\overline{MP}$ = 3.

6. Geg: Punkt P, Gerade g mit $P \notin g$.
Konstruiere das Bild g´ von g bei Z(P|3), mit KB.

7. Geg: Δ ABC, Punkt Q ausserhalb.
Konstruiere das Bild von ΔABC bei Z(Q|-0.5). (ohne KB)

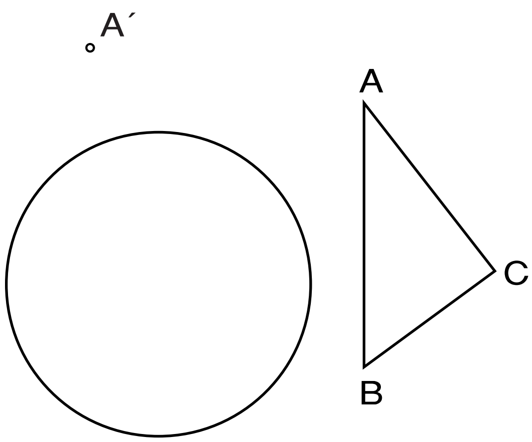
8. Bestimme die Abbildung, welche den Umkreis eines gleichseitigen Dreiecks auf seinen Inkreis abbildet (keine Konstruktion).

9. Ein Dreieck hat die Höhe h_c = 5cm und die Fläche F = 40cm^2. Das Bild dieses Dreiecks bei einer zentrischen Streckung hat die Fläche F´ = 22,5cm^2. Berechne den Streckfaktor k und die Seite c´ des Bilddreiecks.

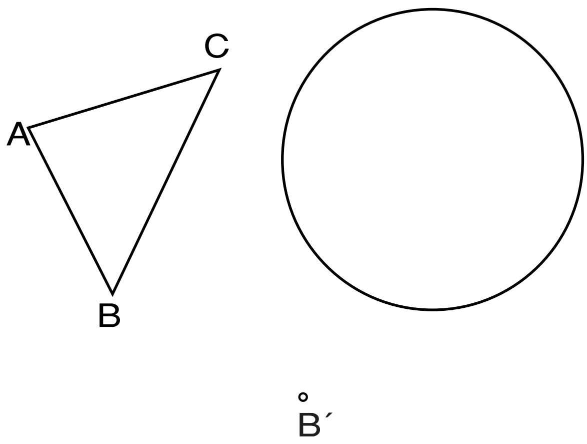
10. Benütze für diese Aufgabe eine neue Seite.
a) Bilde ΔABC (a = 2, b = 4, γ = 90°) mit Z(O|3) ab. O ist im Äussern des Dreiecks zu wählen. Das Bilddreieck heisst ΔA´B´C´.
b) Bilde ΔA´B´C´ mit Z(O|-0,2) ab. Bilddreieck: ΔA"B"C".
c) Bestimme eine Abbildung, die ΔABC direkt auf ΔA"B"C" abbildet.

11. Zeichne $k_1(M_1|4)$ und $k_2(M_2|2{,}5)$ mit $\overline{M_1M_2} = 3$. Konstruiere das Streckzentrum O, von dem aus der eine Kreis auf den anderen abgebildet werden kann. Begründe die Konstruktion.

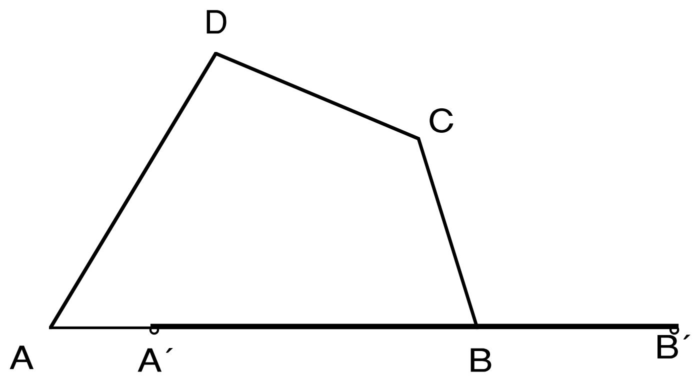
12. A´ ist das Bild von A bei Z(O|k). Konstruiere das Bilddreieck sowie das Streckzentrum, wenn bekannt ist, dass B´ auf dem Kreis liegt (mit KB).



13. B´ ist das Bild von B bei Z(O|k). Konstruiere das Bilddreieck sowie das Streckzentrum, wenn bekannt ist, dass C´ auf dem Kreis liegt (mit KB).



14. Zentrische Streckung: Konstruiere das Bildviereck A´B´C´D´.
Begründe die Konstruktion von C´ oder von D´.



Strahlensätze

15. Konstruiere ein Dreieck aus $w_\alpha = 6$, $\alpha = 45°$, $b : s_c = 5 : 4$. Mit KB; (c)

16. **Konstruiere** ein Dreieck aus $h_b : h_c = 2 : 3$, $\alpha = 60°$, $a = 6$. **KB**. (b)

17. Einem Kreis mit Radius 5 ist ein Rechteck einzubeschreiben, dessen Seiten a und b sich verhalten wie 2 : 3.
Nur Konstruktion; (a,b).

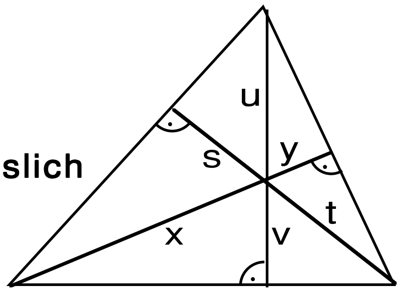
18. Im rechtwinkligen Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$ sei D der Höhenfusspunkt.
a) Beweise: $\Delta ABC \sim \Delta ACD$
b) Leite aus der Behauptung in a) den Kathetensatz her.

19. Im rechtwinkligen Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$ sei D der Höhenfusspunkt.
a) Beweise: $\Delta ACD \sim \Delta CBD$
b) Leite aus der Behauptung in a) den Höhensatz her.

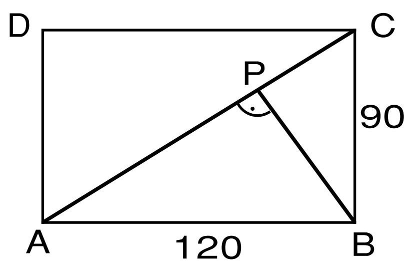
20.

Behauptung: $x \cdot y = u \cdot v = s \cdot t$

a) Formuliere diese Behauptung **ausschliesslich** mit Worten, **ohne** Abkürzungen.
b) Beweise diese Behauptung.



21.

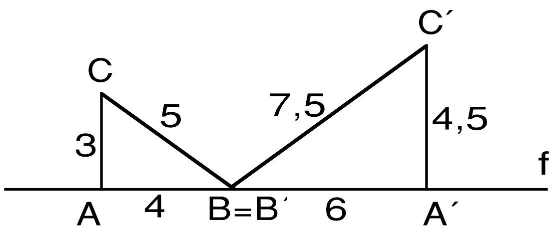


Berechne die Entfernung des Punktes P von allen vier Ecken des Rechteckes.

22. Geg: Kreissektor mit Radius 6 und Mittelpunktswinkel $\alpha = 60°$.
Ges: Kreis, der die beiden Schenkel und den Bogen des Sektors berührt (KB).

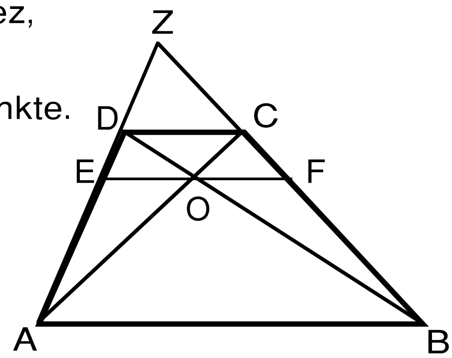
23. Im rechtwinkligen Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$ sei D der Höhenfusspunkt.
a) Beweise: $\Delta ABC \sim \Delta ACD$
b) Aus der Behauptung in a) folgt z.B. die Proportion $b:q = ? : ?$.
Wie heisst die Aussage, die in der Produktgleichung zur obigen Proportion steckt ?

24. a) Beh: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$
Bew: ?
b) Gib die Aehnlichkeitsabbildung an, mit deren Hilfe ΔABC in $\Delta A'B'C'$ abgebildet werden kann (Abbildungen genau angeben)



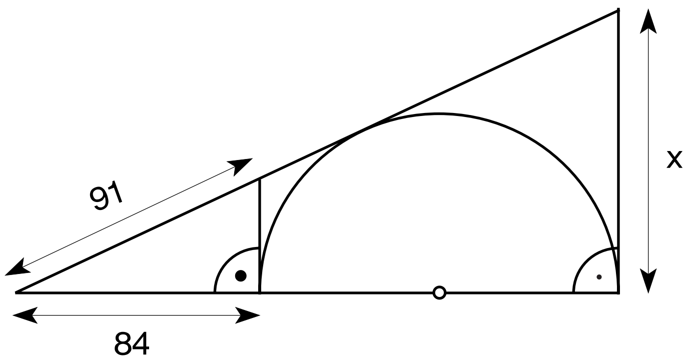
25. **Voraussetzung**: Viereck ABCD ist ein Trapez,
$AB \parallel EF$.
Behauptung: Z, F, C, B sind harmonische Punkte.

Formuliere die Behauptung als Gleichung und beweise sie (Gib die verwendeten Strahlensätze samt den jeweiligen Zentren an).



26.

x = ?



27. Konstruiere mit Hilfe des Sehnensatzes die 4. Proportionale x zu a = 3; b = 5; c = 6. (x)

28. Konstruiere mit Hilfe des Tangentensatzes das geometrische Mittel m von

x = 10 und y = 3. (m)

29. Konstruiere mit Hilfe des Sehnensatzes das geometrische Mittel m von x = 5 und y = 3. (m)

30. Konstruiere eine Seite s_{10} des regelmässigen 10-Ecks und eine Seite s_{30} des regelmässigen 30-Ecks, welche beide den Umkreisradius r = 12 haben.
(s_{10} = ?, s_{30} = ?, KB)

31. Ein Sehnenviereck hat eine Diagonale e der Länge 18. Diese wird durch den Diagonalenschnittpunkt im Verhältnis 2 : 1 geteilt, die andere Diagonale f im Verhältnis 4 : 3. **Berechne** die Länge der Diagonalen f.

32. Geg: $k_1(M_1; R = 8)$, $k_2(M_2; r = 3)$, $\overline{M_1M_2} = m = 13$.
Berechne: a) die Entfernung der Berührpunkte einer äusseren Tangente an k_1 und k_2,
b) die Entfernung des Punkte M_2 vom Schnittpunkt dieser Tangente und der Geraden (M_1M_2).

33. a) Beweise mit Hilfe des Sehnensatzes:
Von allen Rechtecken mit gleicher Fläche F hat das Quadrat den kleinsten Umfang.
b) Beweise: Zwei sich schneidende Diagonalen im regelmässigen 5-Eck teilen einander stetig.

34. Eine Schwimmerin kann bei spiegelglattem Wasser gerade noch den Giebel eines 11m hohen Hauses sehen, das am Ufer steht. Wie weit ist sie vom Ufer entfernt ? (Erdradius: 6370km)

35. Geg: Winkel α = 30°, Punkt P im Innern des Winkelfeldes (**nicht** auf w_α !).

Konstruiere alle Kreise, welche die Schenkel von α berühren und durch P gehen. **KB**

36. Wie hoch über dem Boden muss sich Dein Nabel befinden, wenn dieser Deine Körperlänge im goldenen Schnitt teilt?
(Berechnung dokumentieren)

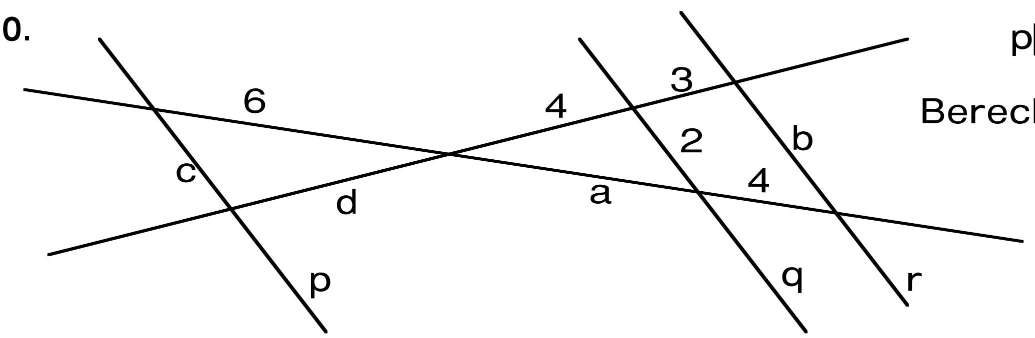
Ähnlichkeit

37. Geg: a = 3,4; b = 2,5; c = 5,9. **Konstruiere** die vierte Proportionale x und miss sie.

38. Teile die Strecke AB mit $\overline{AB}$ = 5,5 harmonisch im Verhältnis 4 : $\sqrt{5}$.
(Wenn die Strecke der Länge $\sqrt{5}$ konstruiert statt gemessen wurde, gibt es einen Extrapunkt)
Miss $\overline{T_iA}$ und $\overline{T_aA}$.

39. **Berechne** w_α im rw. Dreieck mit a = 3, b = 4, γ = 90°.

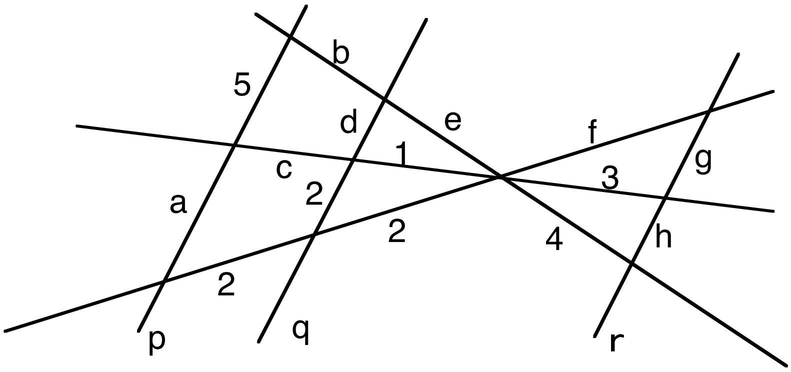
40.



p||q||r

Berechne a, b, c, (

41.



$p \parallel q \parallel r$

Berechne a, b, ... h.

42. Gegeben: Strecke T_iT_a der Länge 5; Punkt B auf T_iT_a mit $\overline{BT_i} = 1{,}5$.
Konstruiere einen Punkt A so, dass A, B, T_i, T_a harmonische Punkte sind.
Bestimme anschliessend **durch Messen** das Teilverhältnis.

43. **Konstruiere** ein Dreieck aus $s_b : s_c = 1 : 2$; $s_a = 4$; $a = 4{,}8$ (mit KB).

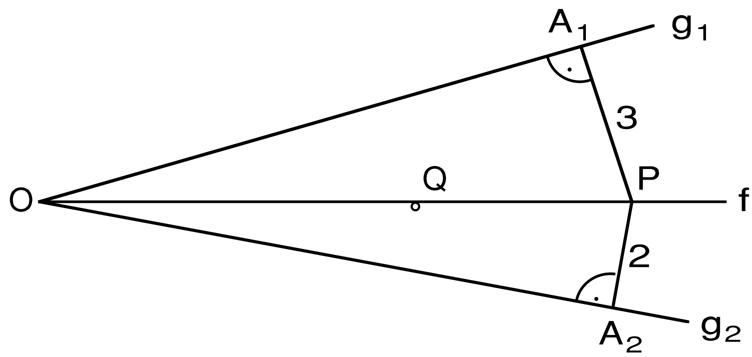
44. Teile AB mit $\overline{AB} = 6$ harmonisch im Verhältnis $1 : \sqrt{8}$.

45. **Konstruiere** ein Dreieck aus $a = 6$, $r = 3{,}5$, $s_a : b = 5:3$ (mit KB).

46.

Beweise:

Die Abstände eines beliebigen Punktes $Q \in f$ von g_1 und g_2 verhalten sich wie 3 : 2.



(Voraussetzung, Behauptung, Beweis)

47. Die Strecke AB mit $\overline{AB} = 16$ ist durch die Punkte P und Q harmonisch im Verhältnis 5:3 geteilt. **Berechne** $\overline{BP}$ und $\overline{BQ}$.

48. **Berechne** im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten 6 und 8 die Winkelhalbierende auf die längere Kathete.

49. Auf der Strecke AB mit $\overline{AB} = 5$ liegt der Punkt P mit $\overline{BP} = 1.5$.
Konstruiere alle Punkte X, die von P die Entfernung 4 haben und von denen aus die Strecke AP und BP unter gleichem Winkel erscheinen (**mit KB**).

Ähnlichkeit: Lösungen

1. $a : b : c = 8 : 15 : 17 \implies 40T = 120 \implies c = 3 \cdot 17 = 51$

2. $a : b = 28 : 35$; $b : c = 35 : 40$; $\implies a : b : c = 28 : 35 : 40$

3. a) $y/400 = 3/4 \implies y = 300$; $l = \sqrt{(400^2 + 300^2)} = 500$; $\alpha = 45°$

4. ----

5. ----

6. ----

7. ----

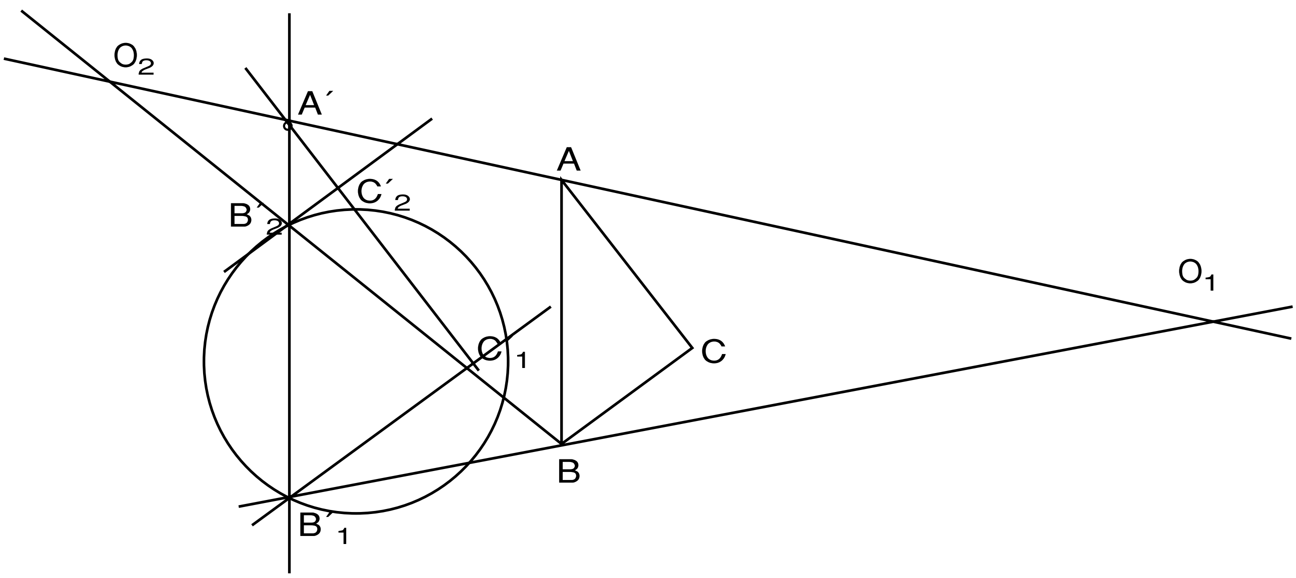
8. O: Umkreiszentrum ==> Z(O|-0,5)

9. $k^2 = F'/F = 9/16 \implies k = \pm 3/4. \implies hc' = 5 \cdot 3/4 \implies c' = 2F'/hc' = 12$
($c = 2F/hc = 16$; $c' = 0.75 \cdot c = 12$)

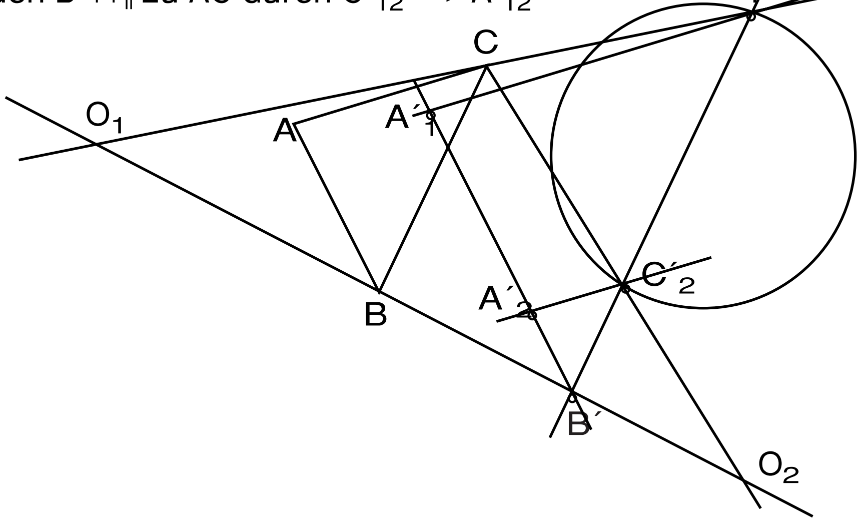
10. a),) ----   c) Z(O|-3/5)

11. Parallelen durch M1,M2 geschn. mit k1,k2 =>P,Q1,2. (PQ1,2) geschn (M1M2) = > Ti, Ta (Zentren) k = +-4/3

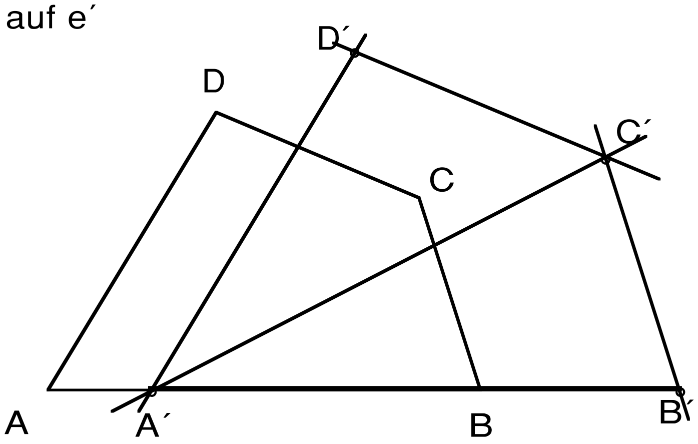
12. 1.∥ zu AB durch $A' \cap k$ --> B'_1, B'_2 2. $(BB'_{12}) \cap (AA')$ --> O_{12}
3. ∥ zu AC duch A' ∩ ∥ zu BC durch B'_{12} --> C'_{12}



13. 1.∥ zu AC durch B´∩ k --> $C´_1$, $C´_2$ 2. $(CC´_{12})$∩(BB´) --> O_{12}
3. ∥ zu AB duch B´ ∩ ∥ zu AC durch $C´_{12}$ --> $A´_{12}$



14. C´ liegt auf b´und auf e´



15. 1.ΔA´C´Mc´ --> 2L. 2. A´Mc´ verdoppeln --> $B_1´$, $B_2´$ 3. $Z(A´|w\alpha/w\alpha´_{12})$ --> A´= A; B, C; >>>>>>>>>>>>$c_1 = 5.5$; $c_2 = 10.3$

16. hb:hc = c:b = 2:3. 1. ΔA´B´C´(sws)--> a´ 2. Z(B´=B|a/a´) -->A,C b = 6,8
oder: 1.$ΔA´H_cC´$ (wws), 2. ∥e zu b´im Abstand h_b -> a´

17. a = 5,5 ; b = 8,3

18. a) ∢ bei C und D = 90° und ∢ bei A gleich ==> Beh nach (ww)
b) b : c = q : b ==> $b^2 = c \cdot q$.

19. a) ∢ bei D = 90° und ∢ BCD = 90 - (90 - α) = α ==> Beh nach (ww)
b) q : h = h : p ==> $h^2 = pq$

20. a) Der Höhensp im Dreieck teilt jede Höhe in 2 Strecken, deren Produkte bei allen Höhen gleich sind.
b) z B $\Delta AHHc \sim \Delta CHHa$ (ww) ==> AH : HHc = CH : HHa <==> x : v = u : y <==> xy = uv etc

21. d = AC = **150** ;
PB : 120 = **90** : 150; PB = **72**
PB : PC = 120 : 90 ; PC = **54**; PA = **96**
g||BC durch P --> Y, Z; PY : 72 = 120 : 150 -->PY = 288/5 = 57,6 --> PZ = **162/5 = 32,5**
YA = ZD: YA : 96 = 120 : 150 ; YA = **384/5 = 76,8**
$PD^2 = (6/5 \cdot 27)^2 + (6/5 \cdot 64)^2 = 36/25 \cdot (729+4096) = 6948$; PD = **83,35**
einfacher: Lot von D auf AC --> Q; DQ = PB = 72; PQ = 150 - 2·54 = 42
==> $DP^2 = 42^2 + 72^2 = 6948$

22. 1. bel Kreis k´, der Schenkel berührt --> M´, Berührpkt B´, $k' \cap w\alpha$ = Q´.
($w\alpha \cap$Bogen = Q)
2.Z(S|SQ/SQ´) -->M

23. a) $\sphericalangle$ bei C und D = 90° und $\sphericalangle$ bei A gleich ==> Beh nach (ww)
b) b : q = c : b ==> $b^2 = cq$ Kathetensatz

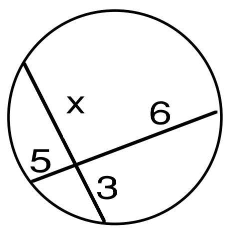
24. a) 3:4:5 (==> rw) = 4,5:6:7,5 (k = 1,5) ==> ~ nach (sss)
b) h = Lot zu f durch B ==> 1. S_h 2. Z(B|1,5)

25. Beh: FB : FC = ZB : ZC (od: CZ : CF = BZ : BF)
Bew: ZB : ZC = a : c (2.Strs., Zentrum Z)
FB : FC = OB : OD (1.Strs., Zentrum B)
= a : c (2,Strs., Zentrum O) ==> Beh

26. Pythagoras: $k^2 = 91^2 - 84^2 = 35^2$;
ähnliche Dreiecke: r : (84+r) = 35 : 91 ==> r = 52.5;
ähnliche Dreiecke:x : (84+2r) = 35:84 ==> x = 78.75

27. 3 : 5 = 6 : x ; 5·6 = 3x ;

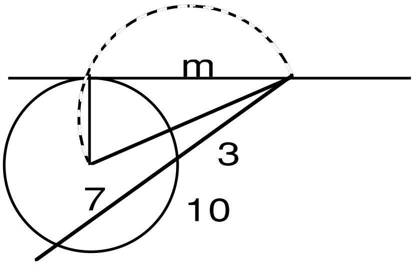
x = 10



28.

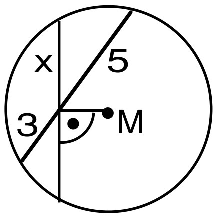
$m^2 = 10 \cdot 3$;

$m = 5{,}5$



29.

$x = 3{,}9$

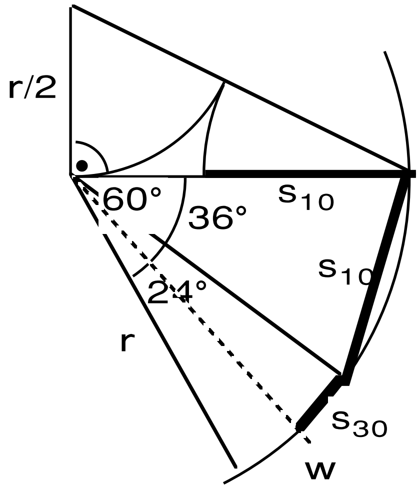


30.

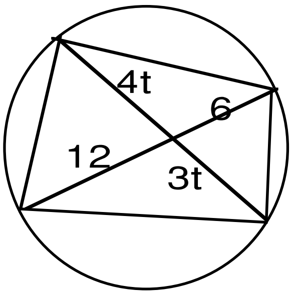
KB:

1. r stetig teilen --> s_{10}
2. 60° - 36° = 24° --> s_{15}
3. 24°/2 = 12° --> s_{30}

$s_{10} = 7{,}4$; $s_{30} = 2{,}5$



31.



$12 \cdot 6 = 4t \cdot 3t$; $t^2 = 6$

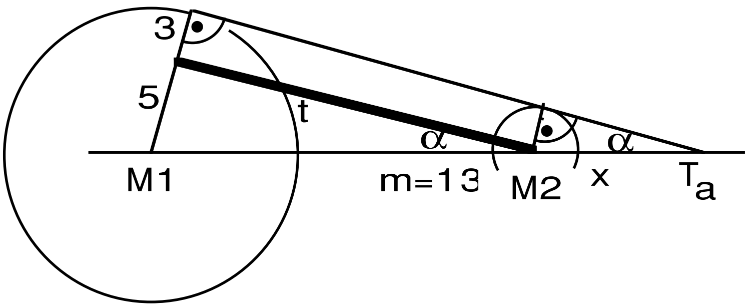
==> $d_2 = 7 \cdot \sqrt{6} = 17{,}1$

32.

a) $t = \sqrt{(13^2 - 5^2)} = 12$

b) $5 : 13 = 3 : x$

==> $x = 39/5 = 7{,}8$



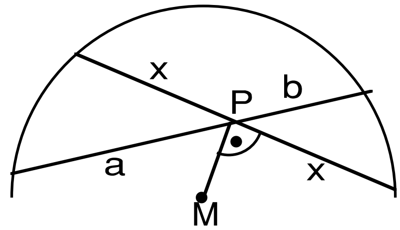
33. a)

Geg: Rechteck mit Seiten a, b, also mit F = ab

Beh: $2a + 2b \geqslant 4\sqrt{(ab)}$

Bew: Halbsehnensatz==> $\sqrt{(ab)} = x$ und 2x ist kürzeste Sehne durch P, d.h. $2x \leqslant a+b$

==> $4x = 4\sqrt{(ab)} \leqslant 2a + 2b$.



b)

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Umfang∢ über s_5;

==>zugehöriger Mittelpunkts∢ = 72°

==> $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 72°/2 = 36°$

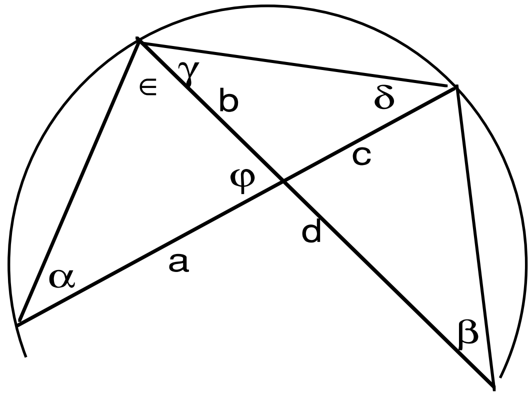
$(\in+\gamma) = 108°$ (5-Ecks∢)

==> $\in = 72°$ ==> $\varphi = 72°$

==> $\Delta\alpha\varphi\in$ ist BesdtimmungsΔ für regelm. 10-Eck

==> b (=c) ist grösserer Teil der stetig geteilten Strecke a

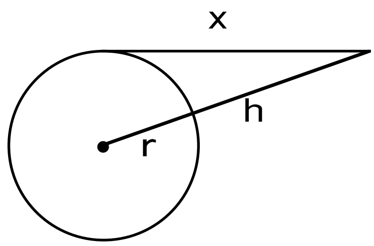
==> a (= s_5) ist grösserer Teil der stetig geteilten Strecke (a+c) = d



34. Tangentensatz:

$x^2 = h\cdot(h+2r) = 11\cdot(11 + 2\cdot 6370000) = \sqrt{12740011}$

x = 11´800 (m)



35. Z bel $\in w_\alpha$, Lot von Z auf Schenkel --> B_1, B_2; k(Z; r) mit $r = \overline{ZB_1}$;

(SP) $\cap$ k --> P_1, P_2 (s: Scheitel von α)

∥e zu (ZP_{12}) durch P $\cap\, w_\alpha$ --> Z_1, Z_2 --> $k_{12}(Z_{12}; \overline{Z_{12}P})$

36. h : x = x : (h–x) => $x = 0.5(\sqrt{5} - 1)h$

37. x = 4,34

38. $\sqrt{5} = \sqrt{2^2+1^2}$;   TiA = 3,53: TaA = 12,47

39. 3 = x + (3–x) ==> 4:5 = x:(3–x) ==> 5x = 12 – 4x ==> x = 4/3.

$w\alpha = \sqrt{(16 + 16/9)} = \sqrt{160/9} = 4/3\cdot\sqrt{10} = 4{,}22$

40. a = 16/3; b = 7/2; d = 9/2; c = 9/4

41. a = 4 ; b = 4/3 ; c = 1 ; d = 5/2 ; e = 4/3 ; f = 6 ; g = 6 ; h = 15/2

42. ATi = 3,75;==> k = 2,5

43. 1. k(Ma|sa/3) mit APP.kreis für Strecke BC mit Verh 1:2 schneiden --> S,S´ (nur 1 Lösg)
2.MaS über S auf (MaS) 2mal abtragen --> A. SMa = 4/3 = 1,33

44. D,A,C,B mit DA = 3.3; AC = 1.6

45. 1.ΔBMC(sss), Umkreis 2. MaC harm im Verh sa:b teilen --> Ti,Ta
3. App.kr über TiTa mit umkreis -->A1, A2

46. Vor: $PA_1 : PA_2 = 3 : 2$; $Q \in f$; B_1,B_2:Fusspunkte der Lote von Q auf g_1,g_2.
Beh: $QB_1 : QB_2 = 3 : 2$
Bew: $OP : OQ = 3 : QB_1 = 2 : QB2$ ==> $3 : QB_1 = 2 : QB_2$ ==> $3 : 2 = QB_1 : QB_2$

47. A_____P___B____Q **PB = 6**
==> (x + 16):x = 5:3 ==> 3x + 48 = 5x
==> **x = BQ = 24** (10 6 x)

48. Kathete 8 wird geteilt im Verh. $6 : \sqrt{(6^2+8^2)} = 6:10$ ==> 8 = 3 + 5.
==> $w = \sqrt{(6^2 + 3^2)} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} = 6{,}708$

49. 1. AB harm im Verh AP : BP --> E 2. Appkr über PE $\cap$ k(P|4) --> X_1, X_2. ($\overline{BE}$ = 3,75)