Stereometrie

Einführung

1. Wie wird der Winkel α zwischen einer Geraden g und einer Ebene E definiert ? (ausfühliche Antwort *ohne* Skizze!)

2. Gib eine Definition für den Winkel φ zwischen zwei Ebenen E_1 und E_2 ! (Antwort ohne Skizze!)

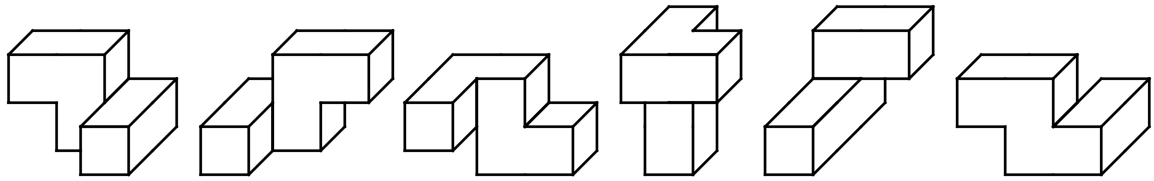
3. Gegeben ist eine Parallelprojektion mit $\alpha = 30°$, $k = 2/3$, Bildebene π.
   a) Gibt es Strecken, die gleichlang sind wie ihre Bildstrecken ?
   b) Gibt es Strecken, deren Bilder 2/3-mal so lang wie die Originale sind ?
   c) Gibt es Winkel ($\neq 0°$), deren Bilder eine Grösse von 0° haben ?
   d) Wie nennen wir in diesem Zusammenhang Geraden parallel zur Projektionsrichtung ?

4. Gegeben ist eine Parallelprojektion mit $\alpha = 45°$, $k = 1/3$, Bildebene π.
   a) Gibt es Strecken, deren Bilder 1/3-mal so lang wie die Originale sind ?
   b) Gibt es Winkel, die gleich gross sind wie ihre Bilder ?
   c) Wie nennen wir in diesem Zusammenhang Ebenen parallel zur Projektionsrichtung ?
   d) Gibt es Strecken, deren Bild ein Punkt ist ?

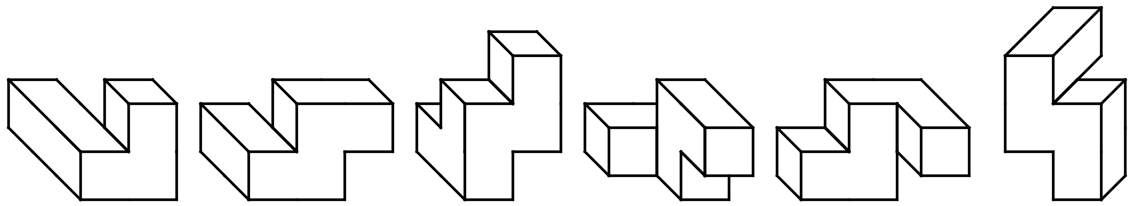
5. Wie ist der Winkel α zwischen zwei windschiefen Geraden f und g definiert (Antwort ohne Skizze!)

6. Im Dreieck ABC liegt D auf AC mit $\overline{AD} = 2/3 \cdot \overline{AC}$, E liegt auf AB mit $\overline{AE} = 0.25 \cdot \overline{AB}$ und F liegt auf BC mit $\overline{BF} = 0.5 \cdot \overline{BC}$. EF und DB schneiden sich in G. Es sei $\overline{FG} = x \cdot \overline{FE}$ und $\overline{DG} = y \cdot \overline{DB}$. Berechne x und y. Drücke **alle** verwendeten Vektoren mit Hilfe von $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ aus.

7. Diese 12 Bilder stellen nur 3 verschiedene Körper dar. Welche gehören zusammen ?

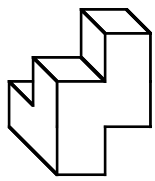


A B C D E F



G H I J K L

8. Der abgebildete Körper ist aus 5 Würfeln aufgebaut. Stelle ihn in der gleichen Lage dar, jedoch mit k = 0.5, α = 45° und Würfelkante **4cm.**



Konstruktionen

9. Zeichne das Schrägbild einer regelm. 3-seitigen Pyramide mit Grundkante a = 5cm, Höhe h = 6cm. Eine Höhe der Grundfläche soll parallel zu π sein, Verzerrungswinkel α = 45°. Verzerrungsfaktor k = 0,5.

10. Zeichne das Schrägbild einer regelmässigen 3-seitigen Pyramide mit Grundkante a = 6cm, Höhe h = 8cm. Die Grundfläche ist horizontal, eine Grundkante ist parallel zu π, Verzerrungsfaktor k = 0.5, Verzerrungswinkel α = 135°. (Teilstrecken dürfen berechnet und abgemessen werden, sorgfältige Konstruktion!)

Wenn im Folgenden von **dem** Würfel die Rede ist, ist ein solcher mit Kante 12 gemeint.

11. Zeichne die Diagonalebene durch A(0|0|12) und B(12|0|12), jene durch A und C(12|12|12) sowie die Parallelebene zu π_1 durch D(12|0|6). Hebe die sichtbaren Teile mit Farben hervor (π_1: Würfelboden).

12. Zeichne die Diagonalebene durch A(0|0|12) und B(0|12|12), jene durch A und C(12|12|12) sowie die Parallelebene zu π_1 durch D(12|0|6). Hebe die sichtbaren Teile mit Farben hervor (π_1: Würfelboden).

13. Im Würfel sind folgende Punkte gegeben: A(12|0|12), B(0|0|12), C(12|0|0). Zeichne die Diagonalebene durch AB, jene durch OB sowie jene durch AC. Verwende Farben und hebe sichtbare Teile hervor.

14. Im Würfel sind folgende Punkte gegeben: A(0|12|0), B(0|12|12), C(0|0|12). Zeichne die Diagonalebene durch AB, jene durch OA sowie jene durch BC. Verwende Farben und hebe sichtbare Teile hervor.

15. Von einer Ebene E ist das Spurendreieck gegeben: X(8|0|0), Y(0|-10|0), Z(0|0|4).

a) Zeichne die Schnittfigur (das Schnittvieleck) von E mit dem Würfel.

b) Im Punkt X treffen sich zwei Seiten des Schnittvielecks. Berechne die Längen dieser beiden Seiten. (Länge der Würfelkante: 12)

16. Gegeben: A(12|0|12), B(6|12|0), C(0|12|3).

Gesucht:

a) Normalprojektion c´´ von c = (AB) auf die yz-Ebene

b) Durchstosspunkt S von b = (AC) durch die xy-Ebene

c) 3. Spur der Ebene ABC (= Schnittgerade der Ebene ABC und der xz-Ebene) mit Begründung der Konstruktion

d) Winkel φ zwischen c = (AB) und der xy-Ebene

e) $\beta = \sphericalangle ABC$

f) Fläche F des Dreiecks ABC

17. Gegeben: A(0|12|12), B(12|6|0), C(12|0|3).
Gesucht:
a) Normalprojektion c''' von c = (AB) auf die xz-Ebene
b) Durchstosspunkt S von b = (AC) durch die xy-Ebene
c) 2. Spur der Ebene ABC (= Schnittgerade der Ebene ABC und der yz-Ebene) mit Begründung der Konstruktion
d) Winkel φ zwischen c = (AB) und der xy-Ebene
e) $\beta = \sphericalangle ABC$
f) Fläche F des Dreiecks ABC

18. Gegeben: A(8|13|-5), B(12|2|0), C(0|5|12).
Konstruiere das Spurendreieck der Ebene ABC und beschreibe genau, wie die erste Seite dieses Dreiecks konstruiert wurde.

19. Gegeben: A(4|0|12), B(0|19|0), C(8|8|-6).
Konstruiere das Spurendreieck der Ebene ABC und beschreibe genau, wie die erste Seite dieses Dreiecks konstruiert wurde.

20. Im Würfel sind die Punkte A(12|0|12), B(0|12|12) und C(12|12|8) gegeben.
Bestimme den Winkel zwischen der Ebene ABC und dem Würfeldeckel.

21. Im Würfel sind die Punkte A(12|0|0), B(0|12|0) und C(12|12|8) gegeben.
Bestimme den Winkel zwischen der Ebene ABC und dem Würfelboden.

Körperberechnungen

22. Bestimme V, M und O sowie den Oeffnungswinkel α eines geraden Kreiskegels mit dem Grundkreisradius r = 2m und der Höhe h = 5m.

23. Eine quadratische Säule und eine quadratische Pyramide haben beide die Grundfläche $1m^2$ und die Oberfläche $10m^2$. Bestimme das Verhältnis der beiden Höhen in der Form $h_s : h_p = 1 : ?$

24. Ein Kreissektor mit Radius R = 115cm und Mittelpunktswinkel β = 135° wird zu einem Kreiskegel geformt. Bestimme das Volumen dieses Kegels und seinen Oeffnungswinkel sowie das Volumen eines Würfels, der die gleiche Oberfläche wie der Kegel hat.

25. Die Grundfläche eines senkrechten Prismas ist ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse 12,8cm. Einer der Winkel dieses Dreiecks ist 30°. Das Volumen des Prismas ist 155cm^3. Berechne seine Oberfläche.

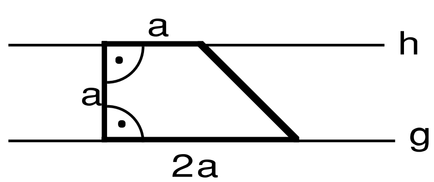
26. Ein Holzwürfel mit der Kante 25cm schwimmt in Wasser und taucht dabei 15,5cm ein. Bestimme die Dichte des Holzes.

27. Ein Kupferbarren (V = 2.75dm^3) wird zu einem Draht mit Durchmesser 0.5mm verarbeitet. Berechne Länge und Oberfläche des Drahtes.

28. Ein gerader Kreiszylinder (r = 11.7cm; h = 36.9cm) wird der Länge nach zylindrisch durchbohrt und verliert dabei die Hälfte seines Volumens. Berechne Volumen und Oberfläche des durchbohrten Körpers.

29. Der Winkel α zwischen einer Seitenkante und der Grundfläche einer geraden quadratischen Pyramide ist 67.8°. Die Grundkante misst 21.3cm. Berechne h und V der Pyramide sowie den Winkel β zwischen zwei benachbarten Seitenkanten.

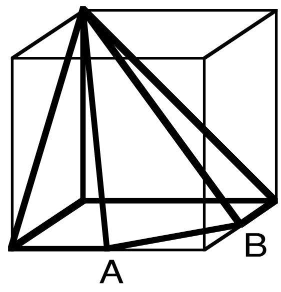
30. Das Trapez wird a) um g b) um h rotiert. Berechne jeweils Volumen und Oberfläche des entstehenden Rotationskörpers.



31. Eine Goldkugel (Radius R = 5cm) wird zu einem Draht (Durchmesser d = 0,5mm) verarbeitet. Bestimme die Länge des Drahtes sowie die Oberflächen von Kugel und Draht.

32. Die Würfelkante hat die Länge a; die Punkte A und B sind Kantenmitten.

Bereche das Volumen V und die Oberfläche O der eingezeichneten Pyramide in Abhängigkeit von a.



33. Einem geraden Kreiskegel (Grundkreisradius r = 4, Höhe h = 12) soll der Kreiszylinder mit maximaler Oberfläche einbeschrieben werden. Bestimme den Radius x, die Höhe h´ und die Oberfläche O_{max} dieses Zylinders.

34. Bestimme das Verhältnis der Volumina eines geraden Kreiskegels (Grundkreisradius r = 12; Höhe h = 36) und seiner Inkugel.

35. Eine quadratische Pyramide hat die Grundkante $a = 5\cdot\sqrt{2}$ und die Seitenkante s = 13. Bestimme das Verhältnis der Volumina von Pyramide und einbeschriebenem Würfel in der Form 1 : x. Dasselbe für die Oberflächen.

36. Wie gross ist die Gewichtsersparnis, wenn ein zylindrischer Tank von 2.3m Innendurchmesser und $16m^3$ Inhalt bei einer Wandstärke von 12mm statt aus Stahl aus Aluminium hergestellt wird ?
($\rho_{Stahl} = 7.84 g/cm^3$; $\rho_{Alu} = 2.76 g/cm^3$)

37. Bei einer zylindrischen Dose von 1 Liter Inhalt ist der Grundkreisradius gleich der Höhe. Welche Abmessungen hat der abgewickelte Mantel ?

38. Berechne die Oberfläche und das Volumen einer geraden dreiseitigen Pyramide mit den Grundkanten 14cm und der Höhe 24cm.

39. Welche Oberfläche hat eine gerade quadratische Pyramide mit der Höhe 12cm und der Mantelfläche $483cm^2$?

40. a) Reg. 6-seitiges Prisma: Grundkante a = 6cm, Höhe h = 9cm. V = ?, O = ?
b) Reg. quadratische Pyramide: Grundkante = Seitenkante = 6m. V = ?, O = ?

41. Einer Halbkugel (Radius r) ist ein Würfel einbeschrieben. Wieviel % des Halbkugelvolumens beträgt das Würfelvolumen?

42. Die Durchmesser von Erde und Mond verhalten sich wie 11 : 3. Wie verhalten sich die Oberflächen ?

43. Eine Glaskugel ($\rho = 2.6\ g/cm^3$) mit dem äusseren Durchmesser d = 9.6 cm hat die Masse m = 1.5 g. Wie dick ist die Wand ?

44. Ein Kugelsegment(r = 4cm, h = 2cm) ist gegeben. Berechne:
a) die Oberfläche des Kugelsegments
b) das Volumen des zugehörigen Kugelsektors.

45. Wie hoch muss eine Rakete steigen, damit von ihr aus 1/100 der Erdoberfläche im Bild aufgenommen werden kann ?
(Erdradius: $R = 6.36*10^6 m$)

46. Wie schwer ist eine bikonvexe Linse der Dicke 3.00mm, wenn die Krümmungsradien 10.00mm und 6.00mm betragen ?
(Dichte des Glases: $\rho = 3.31 g/cm^3$)

47. Eine Kugel mit Durchmesser 1m wird von einer punktförmigen Lichtquelle beleuchtet, die 3m vom Kugelmittelpunkt entfernt ist. Welcher Bruchteil der Kugeloberfläche liegt im Schatten ?

48. Wie schwer ist eine Hohlkugel aus Aluminium mit dem Aussendurchmesser10cm und der Wandstärke 3mm ? ($\rho_{Alu} = 2.6 g/cm^3$)

49. Eine Flüssigkeit füllt den kugelförmigen Innenraum eines Glaskolbens von 5cm Radius vollständig aus. Wie hoch würde diese Flüssigkeit in einem Messzylinder mit 2cm Radius reichen ?

50. Ein kugelförmiger Öltropfen von 4mm Durchmesser breitet sich auf einer Wasseroberfläche zu einer Schicht von $1.2 m^2$ Fläche aus. Wie dick ist diese Schicht ?

51. Wie hoch muss ein Prisma über einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a sein, wenn es eine Inkugel haben soll ?

52. In einer kugelförmigen Schale befindet sich 1 Liter Wein. Der Weinspiegel steht 5cm über der tiefsten Stelle. Welchen Durchmesser hat der Weinspiegel ?

53. Eine Ebene zerlegt die Oberfläche einer Kugel in zwei Hauben. Wie verhalten sich Flächen der beiden Hauben, wenn der zur Ebene normale Kugeldurchmesser im Verhältnis 2 : 3 geteilt wird ?

54. Eine Ebene, deren Abstand vom Mittelpunkt einer Kugel 6cm beträgt, schneidet die Kugel in einem Kreis mit Fläche $45cm^2$. Bestimme die Oberfläche der Kugel.

55. Berechne die Mantelfläche und das Volumen eines geraden Kreiskegels mit dem Grundkreisradius r = 8.67cm und der Mantellinie s = 14.22cm.

56. Wie gross ist die Höhe eines geraden Kreiskegels mit der Oberfläche $5.60dm^2$, dessen Mantellinien mit der Grundfläche einen Winkel von 60° einschliessen ?

57. Um wieviel müssen die Kanten eines Würfels verkleinert werden, damit ein Würfel mit halb so grosser Oberfläche entsteht ?

58. Eine gerade quadratische Pyramide wird von einer Ebene so geschnitten, dass die Seitenkanten halbiert werden. Wieviele % des Pyramidenvolumens werden durch diese Ebene abgeschnitten ?

59. Der innere Durchmesser einer Glaskugel ist d = 9.6. Die Kugel hat hat die Masse m = 1.5 g und es ist $\rho_{Glas} = 2.6\ g/cm^3$. Wie dick ist die Wand ?

60. Geg. : regelm. 3-seitiges Prisma mit Grundkante $a = 4\text{cm}$ und Höhe $h = 8\text{cm}$.

a) Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O.

b) Verbinde den Mittelpunkt einer Grundkante mit der gegenüberliegenden Ecke der Deckfläche. Wie lang ist diese Verbindungsstrecke s und welchen Winkel bildet s mit der Grundfläche?

61. Gegeben (im Würfel): A(9|0|8), B(12|12|0), C(0|12|0).

a) Bestimme $\alpha = \sphericalangle((AC),\pi_1)$.

b) Die Ebene E durch A, B, C schneidet den Würfel.
Berechne $\beta_1 = \sphericalangle(E,\pi_1)$, $\beta_2 = \sphericalangle(E,\pi_2)$, $\beta_3 = \sphericalangle(E,\pi_3)$.

c) Bestimme $\gamma = \sphericalangle BAC$.

d) Berechne die Fläche von ΔABC.

e) Es sei g = (AB). Bestimme $\delta = \sphericalangle(g,\pi_3)$.

f) Zeichne die Schnittfigur von E mit dem Würfel.

Bem: π_1: xy-Ebene; π_2: yz-Ebene; π_3: xz-Ebene

62. Gegeben (im Würfel): A(8|0|6), B(12|12|0), C(0|12|0).

a) Bestimme $\alpha = \sphericalangle((AC),\pi_1)$.

b) Die Ebene E ist bestimmt durch die Punkte A, B, C.
Berechne $\beta_1 = \sphericalangle(E,\pi_1)$, $\beta_2 = \sphericalangle(E,\pi_2)$, $\beta_3 = \sphericalangle(E,\pi_3)$.

c) Bestimme $\gamma = \sphericalangle BAC$.

63. Gegeben (im Würfel):
Ebene E durch die Punkte A(12|0|0), B(12|12|0), C(0|5|7).
Berechne:

a) α =Winkel zwischen E und Würfelboden

b) β = Winkel zwischen AC und Würfelrückwand

c) $\gamma = \sphericalangle(ACB)$ (Scheitel in C)

d) δ = Winkel zwischen E und linker Seitenfläche des Würfels

e) Fläche von ΔABC

f) Zeichne die Schnittfigur (farbig umranden!) von E mit dem Würfel.

Stereometrie: Lösungen

1. $\alpha = \sphericalangle(PDP')$ mit $D \in g \cap \in$, $P \in g$, $P \neq D$, P': Normalprojektion von P auf E.

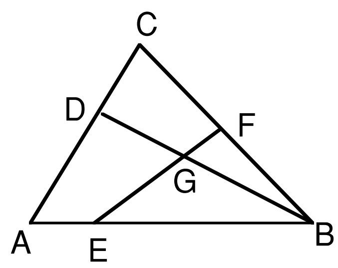
2. Schnittgerade:s; $S \in s$ bel.; l_1, l_2: Lote in E_1,E_2 zu s durch S => $\varphi = \sphericalangle(l_1,l_2)$

3. a) ja, Strecken $\parallel \pi$ b) ja, Strecken $\perp \pi$,
c) ja, wenn $E(s_1,s_2) \perp \pi$, wo s_1, s_2 die Schenkel des Winkels sind
d) projizierend

4. a) ja, Strecken $\perp \pi$, b) ja, wenn Schenkel $\parallel \pi$
c) projizierend
d) ja, Strecken $\parallel$ Projektionsrichtung

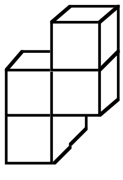
5. Es sei f´ die Parallele zu f welche g schneidet => $<(f,g) \coloneqq <(f'g)$

6. $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$;
$\overrightarrow{DB} = -\vec{a}/3 + \vec{b}$;
$\overrightarrow{EF} = 0.75(-\vec{a} + \vec{b}) - 0.5\vec{b} = -0.75\vec{a} + 0.25\vec{b}$
$\Longrightarrow \vec{0} = \vec{a}/3 + y(-\vec{a}/3 + \vec{b}) + x(-0.75\vec{a} + 0.25\vec{b}) - \vec{b}/2$
$= (1/3 - y/3 - 3x/4)\cdot\vec{a} + (y + x/4 - 1/2)\cdot\vec{b}$
$\Longrightarrow 9x + 4y = 4$ und $x + 4y = 2$
$\Longrightarrow$ **$x = 1/4$; $y = 7/16$**

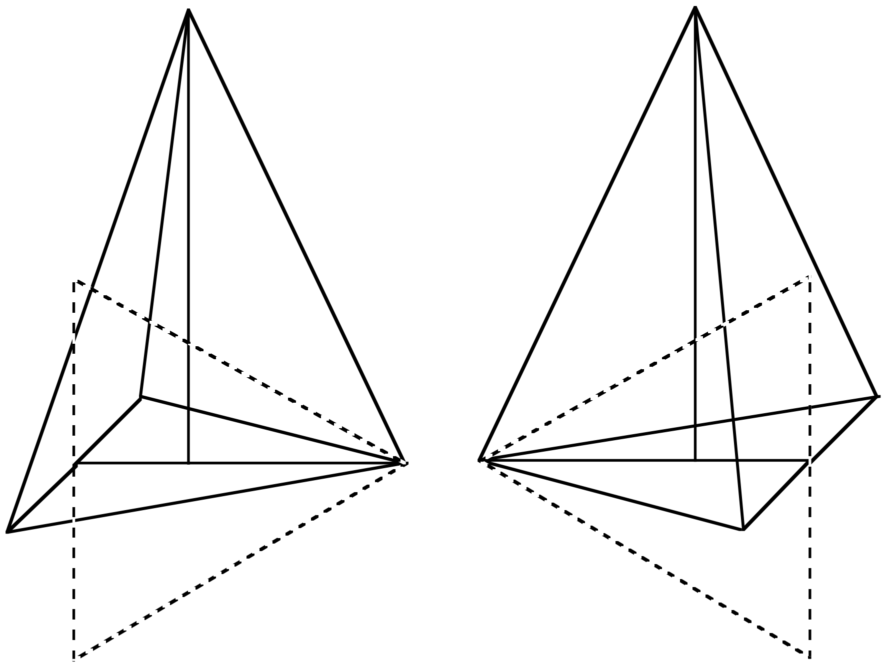


7. D, E, G – A, C, H, L – B, F, I, J, K

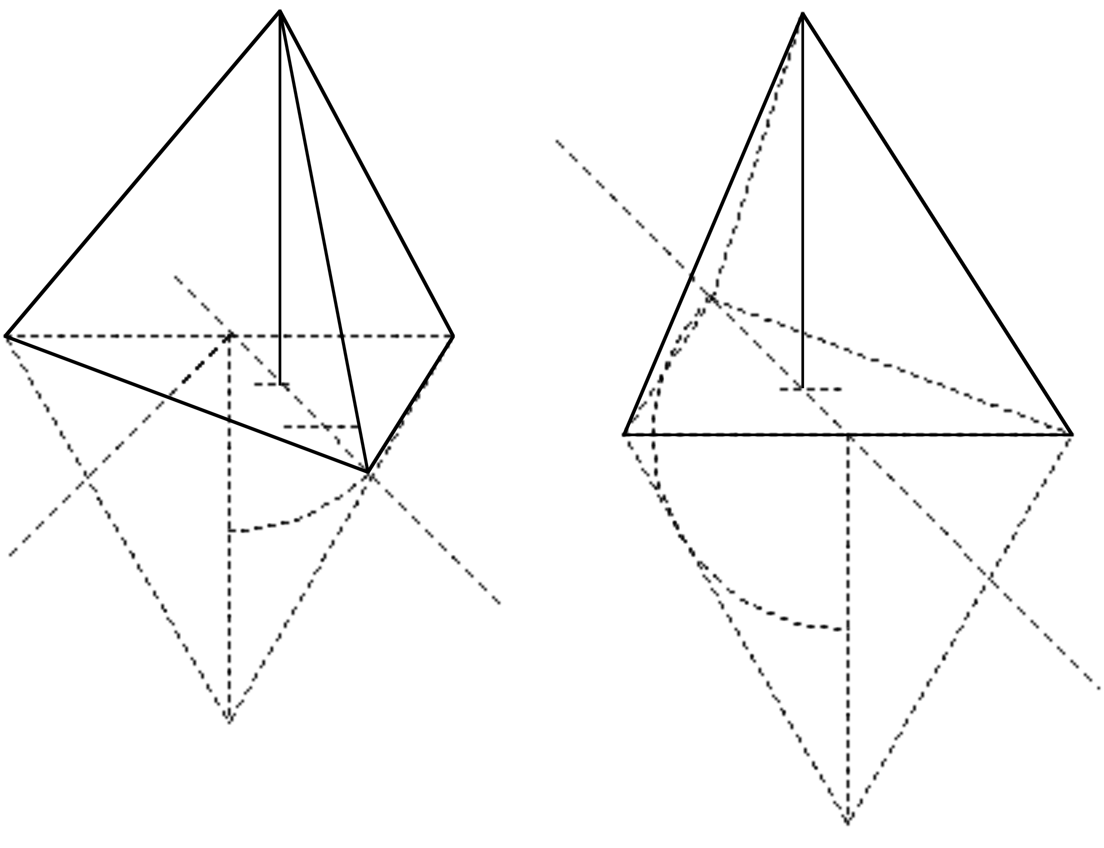
8.



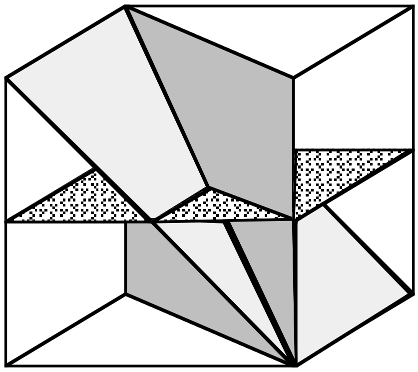
9.



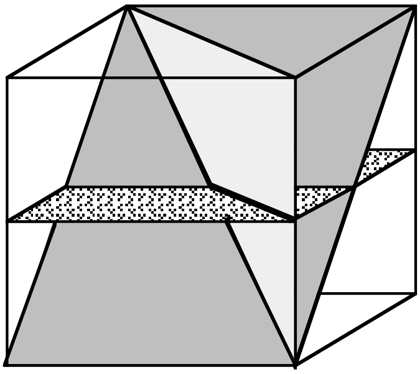
10.



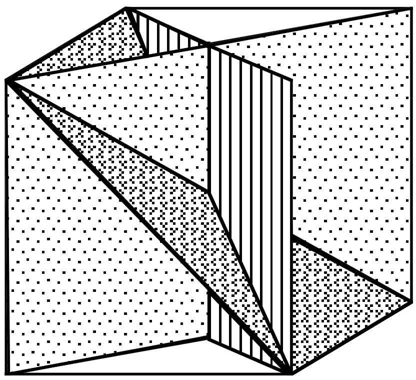
11.



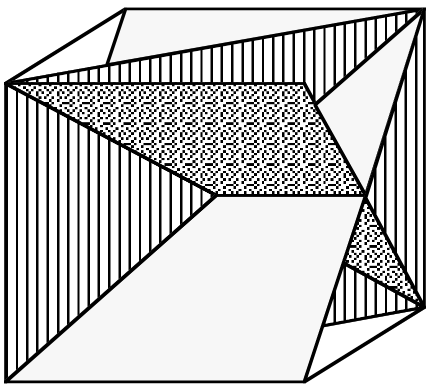
12.



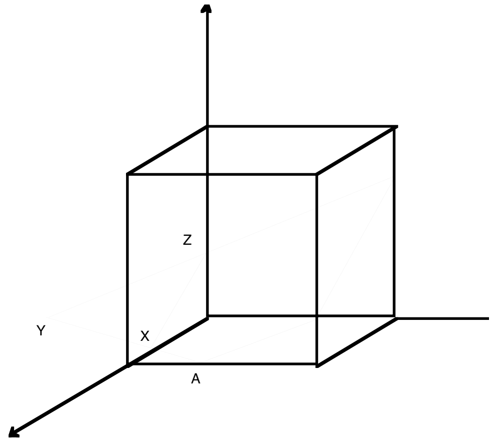
13.



14.



15.



b) $\overline{XZ}^2 = 8^2 + 4^2 = 80$; $\overline{XZ} = 4\cdot\sqrt{5} =$ **8.94**

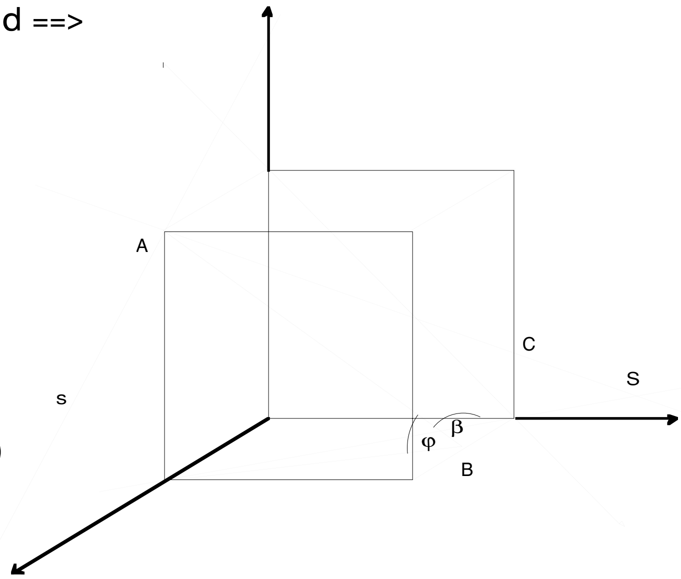
$\overline{YO} : \overline{OX} = \overline{YA''} : \overline{AA''}$ <==> $10 : 8 = (10 + x) : 12$
==> $x = 5$ ==> $\overline{XA}^2 = 4^2 + 5^2 = 41$ ==>
$\overline{XA} = \sqrt{41} =$ **6.04**

16. zu c) : xz-Ebene ‖ rechte Seitenwand ==>
Schnittgeraden mit ABC sind ‖
==> ‖e zu BC durch A --> s

d) $\overline{BA'} = \sqrt{(12^2 + 6^2)} = \sqrt{180} = 13.4$
==> $\tan\varphi = \overline{AA'} / \overline{BA'} = 12/\sqrt{180} = 2/\sqrt{5}$
=> $\boldsymbol{\varphi = 41.8°}$

e) $\overline{AB} = \sqrt{(12^2 + 180)} = 18$;
$\overline{BC} = \sqrt{(6^2 + 3^2)} = \sqrt{45} = 6.71$;
$\overline{AC} = \sqrt{((12\sqrt{2})^2 + 9^2)} = \sqrt{369}$
$\cos\beta = (\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2)/2\overline{AB}\cdot\overline{BC} = 0$ (!)
==> $\boldsymbol{\beta = 90°}$

f) $F = \overline{AB}\cdot\overline{BC}/2 = 9\cdot\sqrt{45} =$ **60.4**

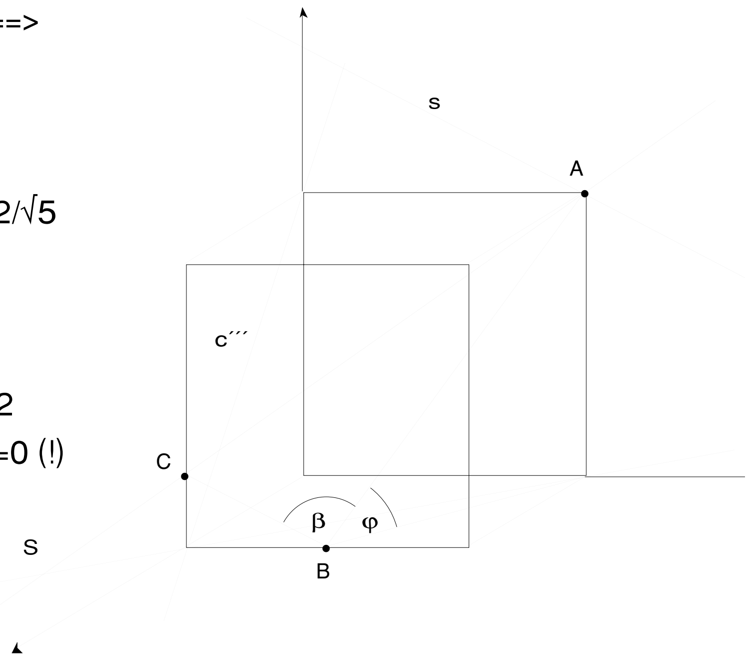


17. zu c) : yz-Ebene ‖ Vorderwand ==>
Schnittgeraden mit ABC sind ‖
==> ‖e zu BC durch A --> s

d) $\overline{BA'} = \sqrt{(12^2 + 6^2)} = \sqrt{180} = 13.42$
==> $\tan\varphi = \overline{AA'} / \overline{BA'} = 12/\sqrt{180} = 2/\sqrt{5}$
=> $\boldsymbol{\varphi = 41.8°}$

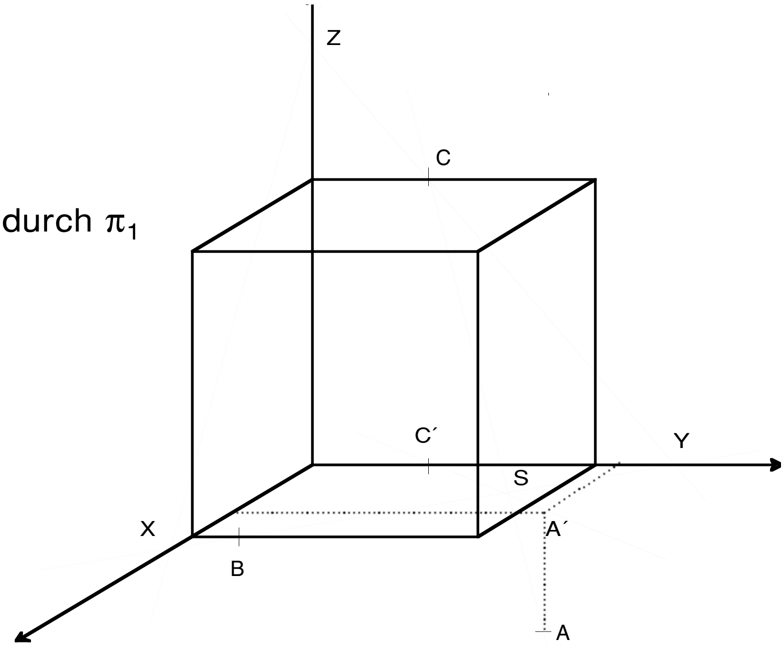
e) $\overline{AB} = \sqrt{(12^2 + 180)} = 18$;
$\overline{BC} = \sqrt{(6^2 + 3^2)} = \sqrt{45} = 6.71$;
$\overline{AC} = \sqrt{((12\sqrt{2})^2 + 9^2)} = \sqrt{369} = 19.2$
$\cos\beta = (\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2)/2\overline{AB}\cdot\overline{BC} = 0$ (!)
==> $\boldsymbol{\beta = 90°}$

f) $F = \overline{AB}\cdot\overline{BC}/2 = 9\cdot\sqrt{45} =$ **60.4**



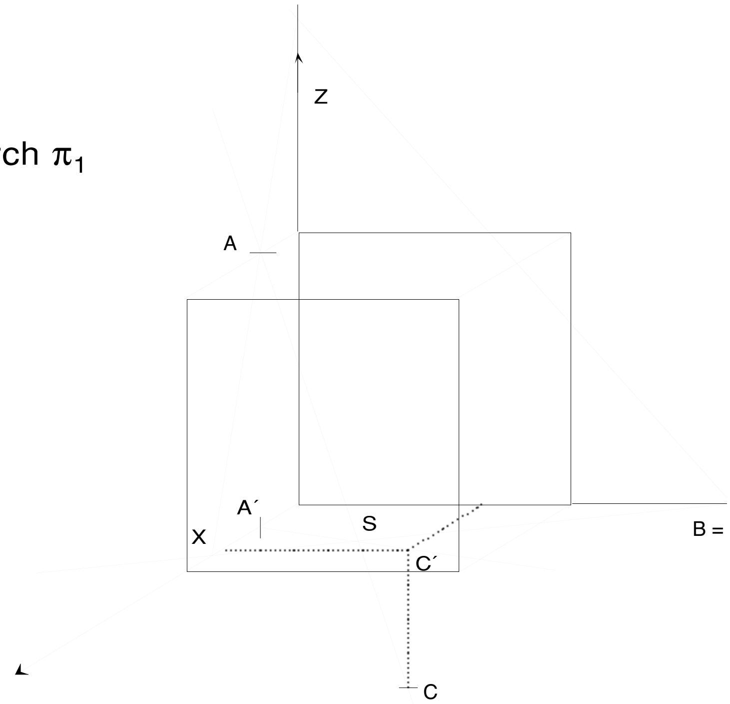
18.

S: Durchstosspunkt von (AC) durch π_1
==> (BS) ist 1. Spur



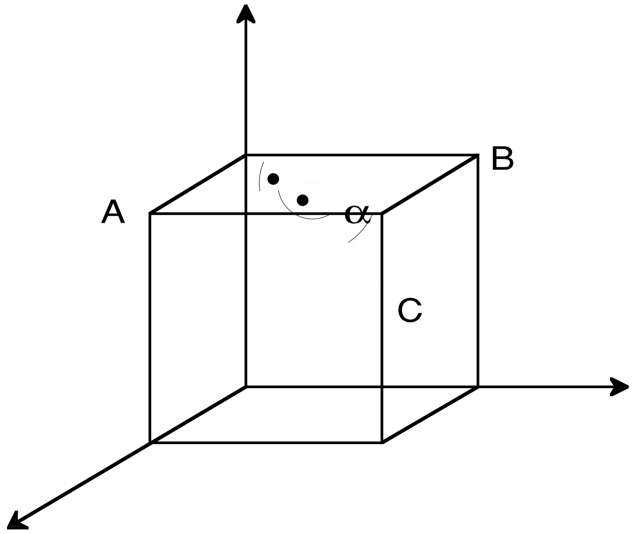
19.

S: Durchstosspunkt von (AC) durch π_1
==> (BS) ist 1. Spur



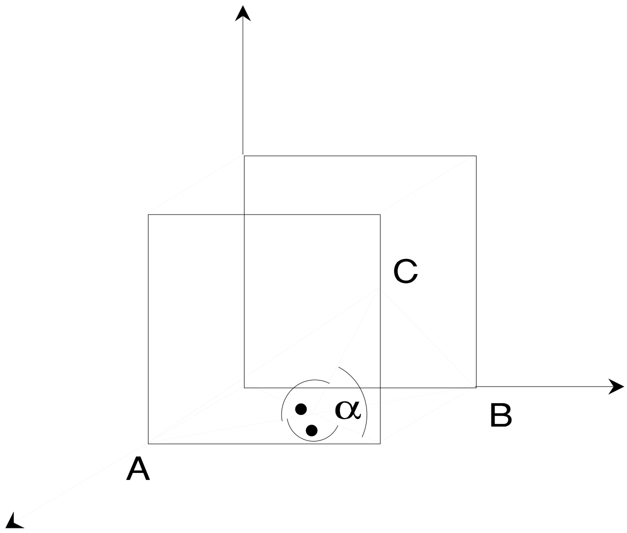
20.

$\tan\alpha = 4/6\sqrt{2}$ ==> $\boldsymbol{\alpha = 25.2°}$



21.

$\tan\alpha = 8/6\sqrt{2}$ ==> $\boldsymbol{\alpha = 43.3°}$



22. $V = \pi r^2 h/3 = \mathbf{20{,}94m^3}$; $s = \sqrt{(r^2+h^2)} = \sqrt{29}m^2$ ==> $M = \pi rs = \mathbf{33{,}84m^2}$;
$O = M + \pi r^2 = M + 12{,}57m^2 = \mathbf{46{,}40m^2}$; $\tan\alpha/2 = 2/5$ ==> $\boldsymbol{\alpha = 43{,}60°}$.

23. $10 = 2+4hs$ ==> $hs = 2$; ($h^* = 4{,}5$); $10 = 1+2\sqrt{(hp^2 + 1/4)}$
==> $hp = \sqrt{20} = \mathbf{4{,}47}$ ==> $hs:hp = \mathbf{1:2{,}236 = 1:\sqrt{5}}$

24. $b = 2\pi R \cdot 135/360 = 3\pi R/4 = 2\pi r = 270{,}96$

$\Longrightarrow r = 3R/8 = 43{,}125$;

$h = \sqrt{(R^2 - r^2)} = R\sqrt{55}/8 = 106{,}6$;

$V = \pi r^2 h/3 = 3\pi\sqrt{55} \cdot R^3/8^3 =$ **207´623;**

$\sin\alpha/2 = r/R = 3/8$, $\alpha =$ **44,0°.**

$O = \pi r(r+s) = 21423 \Longrightarrow a = 59{,}75$;

Vw = 213350;

25. $G = c^2 \cdot \sqrt{3}/8 =$ **35.47cm²** ($\mathbf{35.47cm^2}$)

$\Longrightarrow h = V/G =$ **4.370cm**;

$O = 2G + 0.5 \cdot (3+\sqrt{3})ch =$ $\mathbf{203.3cm^2}$

26. $25^2 \cdot 15.5 \cdot \rho(\text{Wasser}) = 25^3 \cdot \rho(\text{Holz}) \Longrightarrow \rho(\text{Holz}) = 15.5/25 = 0.62(g/cm^3)$

27. $V = 0.25^2 \cdot \pi \cdot l \Longrightarrow l = V/(0.25^2 \cdot \pi) =$ **14.0056km**

$O = 2\pi \cdot 0.25 \cdot l =$ $\mathbf{22.0m^2}$

28. $0.5\pi r^2 h = \pi r_i^2 h \Rightarrow r_i = \sqrt{0.5} \cdot r = 8.273$;

$V = 0.5\pi r^2 h =$ $\mathbf{7934\ cm^3}$

$O = 2\pi(r+r_i) \cdot h + 2(r^2 - r_i^2) \cdot \pi = 2\pi(rh(1+\sqrt{0.5}) + r^2) =$ $\mathbf{5061\ cm^2}$

29. $h = a \cdot \tan\alpha/\sqrt{2} =$ **36.91cm**; $\mathbf{V = 5581cm^3}$;

$h'^2 = h^2 + (a/2)^2 = 38.413$; $\tan(\beta/2) = a/2h' \Longrightarrow$ $\boldsymbol{\beta} \mathbf{= 30.99}°$

oder: $s = a/(\sqrt{2})\cos\alpha) = 39.861 \Rightarrow \sin(\beta/2) = \cos\alpha/\sqrt{2}$ .....

30. a) $V = V(\text{Zyl}) + V(\text{Krg}) = \pi a^3 + \pi a^3/3 =$ $\boldsymbol{4\pi a^3/3}$

$O = \text{Mantel(Zyl)} + O(\text{Kegel}) = 2\pi a^2 + (\pi a^2 + \pi a^2\sqrt{2}) =$ $\boldsymbol{\pi a^2(3+\sqrt{2})}$

b) $V = V(\text{Zyl}) - V(\text{Keg}) = \pi a^2 \cdot 2a - \pi a^3/3 =$ $\boldsymbol{5\pi a^3/3}$

$O = \text{Mantel(Zyl)} + G + \text{Mantel(Keg)} = 2\pi a \cdot 2a + \pi a^2 + \pi a^2 \cdot \sqrt{2}$

$=$ $\boldsymbol{\pi a^2(5 + \sqrt{2})}$

31. $V = 4\pi R^3/3 =$ $\mathbf{523{,}6cm^3}$ $= \pi d^2 h/4 = \pi r^2 h$

$\Longrightarrow h = 16R^3/3d^2 = 4r^3/(3r^2) =$ **2667m**

$O(\text{Kugel}) = 4\pi R^2 =$ $\mathbf{314.2cm^2}$;

$O(\text{Draht}) = \pi dh =$ $\mathbf{4{,}189m^2}$ (ohne Deckflächen)

32. $V = 1/3 \cdot G \cdot h = 1/3 \cdot 7/8 \cdot a^2 \cdot a =$ $\mathbf{7a^3/24 = 0.292a^3}$

ΔABS: $g = a\sqrt{2}/2$; $\overline{AS}^2 = a^2 + (a\sqrt{5}/2)^2 \Rightarrow \overline{AS} = 3a/2$;

$h' = a\sqrt{34}/4$; $F\Delta ABS = a^2\sqrt{17/8}$

$O = a^2(7/8 + 2 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{17/8})$

$=$ $\mathbf{a^2/8 \cdot (15 + 4\sqrt{2} + \sqrt{17}) = 3.10a^2}$

33. x = 3; h´ = 3 ; O = 36 = 113,1

34. $\alpha/2 = 35{,}7°$; $\rho = 4 \cdot \tan(\alpha/2)$ ==> v(kugel) = 100,38; v(kegel) = 64π; x = 2,003

oder: $r \cdot h = \rho \cdot s \Rightarrow \rho = 12*36/\sqrt{1440} = 11.384$

35. V(p) : V(W) = 2,27 = 1 : 0,440; O(P) : O(W) = 3,40 = 1 : 0,294

36. V(innen) = 16 = $\pi \cdot 1.15^2 \cdot h \Rightarrow h = 3.851$m

V(Tank) = $\pi \cdot 1.162^2 \cdot (h + 2 \cdot 0.012)$ – V(innen) = 0.437461 m^3 = 437461cm^3

Ersparnis = (7.84 – 2.76) · V(Tank) = **2´222´300 g = 2222 kg**

37. $V = \pi r^2 \cdot r = 1\ dm^3$;

=> Höhe : $\mathbf{r = \sqrt[3]{1/\pi} = 0.6828}$ **dm**; Länge: **l = $\mathbf{2\pi r}$ = 4.290dm**

oder M = 2.929

38. $V = 1/3 \cdot 14^2/4 \cdot \sqrt{3} \cdot 24 =$ $\mathbf{392 \cdot \sqrt{3} = 678.95}$

$h^* = \sqrt{1777/3} = 24.3379$

$O = 14^2/4 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 1/2 \cdot 14 \cdot h^* =$ **595.97**

(O = 508.2cm^2, V = 546cm^3)

39. $M = 4 \cdot 1/2 \cdot a \cdot h'$; $h'^2 = 12^2 + a^2/4 \Rightarrow a\sqrt{576 + a^2} = 483 \Rightarrow a^4 + 576a^2 - 233289 = 0$

$\Rightarrow a^2 = 274.346 \Rightarrow O =$ **757.3**

40. a) **O** $= 12 \cdot a^2/4 \cdot \sqrt{3} + 6 \cdot a \cdot h =$ **511.1 $\mathbf{cm^2}$**

V $= G \cdot h = 6 \cdot a^2/4 \cdot \sqrt{3} \cdot h =$ **8141.8 $\mathbf{cm^3}$**

b) $h^2 = s^2 - a^2/2 = s^2/2$; $h = s/\sqrt{2}$; **V** $= 1/3 \cdot s^2 \cdot s/\sqrt{2} = 8/3\sqrt{2} =$ **50.91 $\mathbf{m^3}$**

O $= s^2 + 4 \cdot s^2/2 \cdot \sqrt{3} = s^2(1 + \sqrt{3}) =$ **98.35 $\mathbf{m^2}$**

c) Gerader Kreiszylinder: O = 2·M = 50cm^2. r = ?, V = ?

c) $2\pi rh = 25$ und $2\pi r^2 = 25 \Rightarrow r = 5/\sqrt{2\pi}$ und $h = 25/2\pi r \Rightarrow h = 5/\sqrt{2\pi} = r$

r = h = 1.995cm; V = $\mathbf{\pi r^2 h}$ = 24.93

41. $r^2 = a^2 + (a/\sqrt{2})^2 = 3a^2/2$; $r = \sqrt{1.5}*a$

$V_W : V_{HK} = a^3 * (3\pi/2*(\sqrt{1.5}*a)^3 = \sqrt{2/3}/\pi = 0.2599 = 25.99\%$

42. $r_M = 3r_E/11$, $O_E : O_M = 4\pi r_E{}^2 : 4\pi(3r_E/11)^2 =$ **121 : 9 = 13.44 : 1**

43. $m = 1.5 = 2.6 * 4\pi/3 * (4.8^3 - r_i{}^3) \Rightarrow r_i = 4.79801$

$\Rightarrow$ **x = 0.001994 [cm] = 0.01994 [mm]**

44. a) O = Haube + Grundkreis

$= 2\pi rh + \pi\rho^2 = 2\pi rh + \pi(r^2 - 2^2) =$ **28π = 87.96**

b) $V =$ **$2\pi r^2h/3 = 64\pi/3 = 67.02$ [cm³]**

45. α: halber Zentriwinkel, x: Steighöhe, h: Haubenhöhe

$\cos\alpha = R/(R+x) = (R-h)/R \Rightarrow h = Rx/(R+x)$ (ρ = 1270km)

$O(\text{Haube}) = 2\pi R*Rx/(R+x) = 0.01*4\pi r^2 \Rightarrow$ **x=R/49 = 129.8 km**

oder: $O_E/100 = 4\pi R^2/100 = \text{Haube} = 2\pi Rh \Rightarrow h = R/50$ (=127.2km)

Kathetensatz: $R^2 = (R-h)(R+x) \Rightarrow x = hR/(R-h) = R/49$

46. $M_1M_2 = a = r_1 + r_2 - d = 13$;

x = Dicke des Segmentes 2:

$10^2 - (7+x)^2 = 6^2 - (3+(3-x))^2 \Rightarrow x = 51/26\text{mm} = 1.9615\text{mm}$

=> y = Dicke von S1 = 27/26 mm == 1.03846mm; $\rho = 4.4374$

$\Rightarrow V_1 = 32.7063\text{mm}^3$: $V_2 = 64.6227\text{mm}^3$; $V = 97.3290\text{mm}^3$; **m = 0.3222g**

47. $M_1M_2 = m$; $m : r = r : x \Rightarrow x = r^2/m = 1/4 : 3 = 1/12$

Haubenhöhe = r + x = 7/12 => $H : O = 2\pi rh : 4\pi r^2 = h : 2r = 7/12 : 1 =$ **7/12**

48. 230.6g

49. 41.67cm

50. $4\pi r^3/3 = G \cdot h \Rightarrow h = 4\pi r^3/(3\cdot G) = 4\pi\cdot 8/(3 \cdot 1.2 \cdot 10^6)$ mm = **$2.793*10^{-5}$mm**

51. $a\cdot\sqrt{3}/3$

52. $V = \pi h^2/3 \cdot (3r - h) \Rightarrow 1000 = 25\pi/3 \cdot (3r - 5)$ | $\cdot 3/(25\pi)$
$\Rightarrow 120/\pi = 3r - 5 \Rightarrow r = (120/\pi + 5)/3 = 14.399$
$\Rightarrow \rho^2 = r^2 - (r - h)^2 = 10r - 25 \Rightarrow \rho = 10.908$; $d = 21.82$ ($= 10\sqrt{(3(48-\pi))}/(3\sqrt{\pi})$
21.82cm

53. 1 : 9

54. 632.4cm^2

55. $h^2 = s^2 - r^2$; $h = 11.271$
$M = \pi rs =$ **387.3 cm²**;
$V = \pi r^2 h/3 =$ **887.23 cm³**

56. $O = \pi r^2 + \pi rs$; $h = s\sqrt{3}/2$; $r = s/2$
$O/\pi = r(r+s) = r(r+2r) = 3r^2 \Rightarrow r = \sqrt{O/(3\pi)} = 7.708$; $s = 15.42$
$h = r\sqrt{3} = \sqrt{O/\pi} =$ **13.35cm**

57. um $a(1 - \sqrt{0.5}) = 0.29a$

58. 12.5%

59. $m = 1.5 = 2.6 * 4\pi/3 * (4.8^3 - r_i^3) \Rightarrow r_i = 4.79801$
$\Rightarrow$ **x = 0.001994 [cm] = 0.01994 [mm]**

60. a) $V = a^2\sqrt{3}\cdot h/4 = 16\cdot\sqrt{3} =$ **27.71cm³**.
$O = 2\cdot a^2\sqrt{3}/4 + 3\cdot 4\cdot 8 = 8\cdot\sqrt{3} + 96 =$ **109.9cm²**
b) $s^2 = MA'^2 = h^2 + (a\sqrt{3}/2)^2 = 64 + 12 = 76$, $\mathbf{s = 2\sqrt{19} = 8.718}$
$\tan\alpha = h / h^* = 8 / (4\sqrt{3}/2) = 4/\sqrt{3} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{66.59}°$ (oder $\sin\alpha = h / s = 4/\sqrt{19}$)

61. a) $\tan\alpha = AA'/A'C = 8/\sqrt{225} = 8/15 \Longrightarrow \boldsymbol{\alpha = 28{,}07°}$
b) $\tan\beta_1 = 8/12 = 2/3 \Longrightarrow \boldsymbol{\beta_1 = 33{,}69}°$; $\boldsymbol{\beta_2 = 90}°$; $\boldsymbol{\beta_3} = 90° - \beta_1 = \mathbf{56{,}31°}$
c) $\overline{A'B} = \sqrt{153}$, $\overline{AB} = \sqrt{217}$; $\overline{A'C} = \sqrt{225} = 15$, $\overline{AC} = \sqrt{289}$
$\cos\gamma = (217 + 289 - 144)/2\cdot\sqrt{217\cdot 289} \Longrightarrow \boldsymbol{\gamma = 43{,}72°}$
d) $h_a = \sqrt{12^2+8^2} = \sqrt{208} \Rightarrow \mathbf{F} = 0.5 \cdot \sqrt{208} \cdot 12 = \mathbf{86.53}$
e) $P(12 \mid 0 \mid 0)$. $\sin\delta = \overline{PB} / \overline{AB} = 12/\sqrt{217}; = 6/7$, $\boldsymbol{\delta = 54.50°}$
f) ----

62. a) $\tan\alpha = AA'/A'C = 6/\sqrt{208} \Longrightarrow \alpha = 22{,}59°$

b) $\tan\beta_1 = 6/12 = 0{,}5 \Longrightarrow \beta_1 = 26{,}57°$; $\beta_2 = 90°$; $\beta_3 = 90° - \beta_1 = 63{,}43°$

c) $A'B = \sqrt{160}$, $AB = \sqrt{196}$; $A'C = \sqrt{208}$, $AC = \sqrt{244}$

$\cos\gamma = (196 + 244 - 144)/2\cdot\sqrt{(196\cdot 244)} \Longrightarrow \gamma = 47{,}41°$

63. a) $\tan\alpha = 7/12 \Rightarrow \alpha = 30.3°$

b) $\tan\beta = 12/\sqrt{74} \Rightarrow \beta = 54.4°$

c) $D(12|5|0)$, $DC = \sqrt{193}$, $\sphericalangle(DCA)$: $\tan\gamma_1 = 5/DC \Rightarrow \gamma_1 = 19.79°$

$\sphericalangle(DCB) = \gamma_2$: $\tan\gamma_2 = 7/DC \Rightarrow \gamma_2 = 26.74°$, $\Rightarrow \gamma = 46.5°$

oder: $AC = \sqrt{218}$, $BC = \sqrt{242}$,

$\cos\gamma = (218 + 242 - 144)/(2\cdot\sqrt{218}\cdot\sqrt{242}) \Rightarrow \gamma = 46.5°$

d) $\delta = 90°$

e) $F = 0.5\cdot 12\cdot DC = 83.4$

f)...