Trigonometrie

Trigonometrie 1: Definitionen

1. **Beweise** : a) $\cos\varphi = \sin(90^0 - \varphi)$ b) $1 + \tan^2\varphi = 1 : \cos^2\varphi$
   Es dürfen nur die Definitionen der Winkelfunktionen benützt werden !

2. Bekannt: $\cos\varphi = 0{,}7$. Berechne die Werte der anderen zwei trigonometrischen Funktionen für φ, ohne φ zu bestimmen.
   (Lösungsweg aufschreiben !)

3. a) **Konstruiere** einen Winkel α, für den gilt: $\tan\alpha = 1.5$.
   b) **Konstruiere** eine Strecke der Länge x dm, so dass $x = \cos 15°$.

4. **Beweise**: Für $0° < \beta < 90°$ gilt:
   a) $\cos\beta = \sin(90° - \beta)$ b) $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$
   c) $1 + \tan^2\beta = 1 : \cos^2\beta$

5. Es ist $\cos\varphi = 0{,}6$. Berechne die Werte der übrigen drei trigonometrischen Funktionen für φ, ohne φ zu bestimmem (Lösungsweg aufschreiben !).

6. a) $\cos x = 0{,}342$; $x = ?$ b) Gib den Winkel auch im Gradmass an.

7. Der Sinus eines Winkels α ist 0,4.
   Konstruiere α (ohne Taschenrechner, ohne Transporteur !)

8. Vereinfache: a) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1$ b) $\sin^3\alpha + \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha$

9. Der Cotangens des Winkels δ ist bekannt. Berechne $\sin\delta$.

10. Das Bogenmass eines Winkels x ist 2,3. Bestimme:
    a) $\sin x$ b) x im Gradmass

11. Vereinfache den Term $\cos^4\beta - \sin^4\beta$ so weit, dass nur noch **eine** Winkelfunktion auftritt.

12. **Beschreibe**, wie mit einer Konstruktion eine Näherung für die Zahl $\sin 60°$ gefunden werden kann.

13. **Beschreibe** die Konstruktion eines Winkels α, für den gilt: $\tan\alpha = 1{,}5$.

14. **Beweise** $\cos 30° = \sqrt{3}/2$

15. Bestimme $\sin\alpha$, wenn $\cos\alpha = 0.333$.
(**ohne** Berechnung von α. Ausrechnung aufschreiben!)

16. Beweise: $\sin 30° = 1/2$

17. Mit einer Konstruktion soll eine Näherung für $\tan 75°$ gefunden werden. Beschreibe diese Konstruktion.

18. Gib den Winkel $\alpha = 7.5°$ im Bogenmass an a) als Vielfaches von π
b) als Dezimalbruch.
Rechne um ins Gradmass: $x = -10$

Trigonometrie 1: Grundaufgaben

19. Berechne die fehlenden Seiten im rw. Dreieck ABC ($\gamma = 90°$) zuerst allgemein und dann für die angegebenen Zahlen:
a) $\alpha = 37°$; $b = 8$ b) $F = 147$; $\beta = 11°$

20. Berechne die fehlenden Seiten und Winkel im rw. Dreieck ABC ($\gamma = 90°$) :
a) $\alpha = 56{,}3°$; $b = 3{,}77$ b) $F = 13{,}5$; $\beta = 27{,}5°$
c) Berechne in b) die Seite a allgemein.

21. Von einem rw. Dreieck ($\gamma = 90°$) sind α und h_c gegeben. Berechne die Dreiecksseiten a) allgemein b) für $\alpha = 22{,}3°$ und $h_c = 17{,}2$

22. Von einem gleichschenkligen Dreieck sind die Fläche F und der Basiswinkel α bekannt.
Berechne die Basis b und den Schenkel s für $F = 125$ und $\alpha = 36.4°$.

23. Berechne die fehlenden Seiten und Winkel in einem rw Dreieck ($\gamma = 90°$), wenn bekannt ist:
a) $b = 13.3$; $\beta = 37.4°$ b) $h_c = 345$; $a = 456$
c) $F = 100$; $\alpha = 15°$ d) löse a) allgemein

24. Welche Fläche hat ein glsch. Dreieck mit Schenkel $s = 7$ und Basiswinkel $\beta = 50°$?

25. Berechne die fehlenden Stücke eines rechtwinkligen Dreiecks mit $\gamma = 90°$.
a) $a = 12.61$; $b = 3.942$ b) $a = 7.7$; $\alpha = 34.56°$ c) $c = 43.01$; $\beta = 61.33°$

26. Ein Dreieck ist gegeben durch $\gamma = 27°$, $c = 4.3\,\text{cm}$ und $\beta = 90°$. Berechne die Länge der Seite a.

27. Ein rechtwinkliges Dreieck ist gegeben durch $a = 25\,\text{cm}$, $\alpha = 29.2°$ und $\gamma = 90°$. Berechne die Seiten b und c.

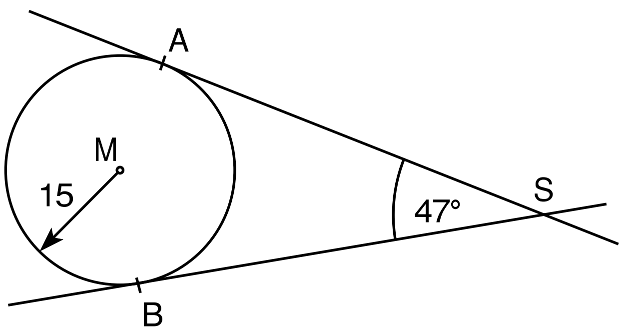
28. Die Seiten eines Rechtecks messen $a = 11.3\,\text{cm}$ und $b = 6.72\,\text{cm}$. Berechne den spitzen Winkel zwischen den beiden Diagonalen.

29. Berechne die Seiten a und c eines rechtwinkligen Dreiecks aus $\gamma = 90°$, $b = 31\,\text{cm}$ und $\beta = 37.4°$.

30. Berechne die Seiten a und c eines rechtwinkligen Dreiecks aus $\gamma = 90°$, $b = 2.4\,\text{cm}$ und $\alpha = 23°$.

Trigonometrie 1: Anwendungen

31.



(SA), (SB) : Tangenten

Berechne $\overline{SB}$, $\overline{AB}$ und die Länge des kürzeren der beiden Bogen AB.

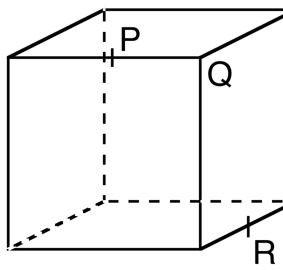
32. Bei einer quadratischen Pyramide mit Grundkante $k = 5$ misst der Winkel β zwischen Grundfläche und Seitenkante 71°.
Berechne die Höhe h der Pyramide, die Seitenkante s, die Oberfläche F, den Winkel δ, gebildet aus zwei benachbarten Seitenkanten sowie den Winkel φ zwischen einer Seitenfläche und dem Boden.

33. Von einer berühmten Künstlerin soll eine 3m hohe Bronce-Figur im Park des Kunsthauses aufgestellt werden. Die Künstlerin bringt folgenden Wunsch an: Für die Figur soll ein Sockel hergestellt werden, so dass die Figur samt Sockel in 10m Entfernung für einen Betrachter mit der Augenhöhe 1.5m unter dem vertikalen Sehwinkel von 35° erscheint. Wie hoch muss der Sockel werden?

34. Im Garten von Lord Walknotwell stossen 2 gerade Kanten eines riesigen Rosenbeetes im Winkel von 67° aufeinander. Es nervt den alten Lord, dass er bei seinem täglichen Spaziergang den Umweg um diese Ecke des Beetes gehen muss. Er befiehlt daher seinem Gärtner, die Ecke durch einen Kreisbogen zu ersetzen, welcher in den Punkten A und B berührend in die geraden Kanten des Beetes übergeht. Welchen Weg spart der Lord täglich, wenn $\overline{AB}$ = 27 Fuss ?

35. Agent SL ist dem Geheimsender Oropax auf der Spur. Auf einer schnurgeraden Strasse peilt er den Sender zweimal an: im Punkt P beträgt der Winkel zwischen Strasse und der Richtung zum Sender 24,3°, im Punkt Q 75,3°, wobei $\overline{PQ}$ = 3,56km. In welchem Abstand von der Strasse befindet sich der Sender ?

36. Im nebenstehenden Würfel sind P und R Kantenmitten. Berechne:
a) $\alpha = \sphericalangle$ RPQ
b) Winkel β zwischen (PR) und dem Würfelboden

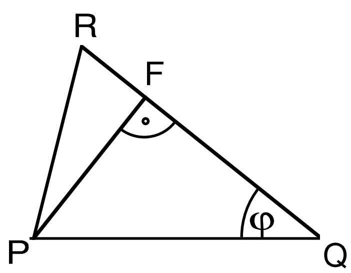


37. Die Flugplätze von Wien und München haben dieselbe geogr. Breite φ = 48.1°. Wie gross ist ihre auf einem Breitenkreis gemessene Entfernung, wenn ihre geogr. Längen 11.6° resp. 16.5° betragen ?
(Erdradius R = 6370km)

38. Welchen Bogen hat ein Kreissektor mit Fläche F = 1m^2 und Winkel x = 0,5 (x ist im Bogenmass gegeben!) ?

39. Wie lang ist die Seite eines regelmässigen 19-Ecks mit der Fläche 1m^2 ?

40.



φ = 25.3° ; $\overline{RQ}$ = 68.3 ; $\overline{PF}$ = 29.7
$\overline{PR}$ = ?

41. An einen Kreis um M mit Radius r = 5 ist vom Punkt P aus eine Tangente gelegt mit Berührpunkt B. Es ist $\overline{PB} = 11$. Die Gerade (PM) schneidet den Kreis in den Punkten S und T, wobei $\overline{PS} > \overline{PT}$. Berechne:
a) $\alpha = \sphericalangle MPB$
b) Die Länge s und den Mittelpunktsabstand a der Sehne TB.

42. Wie hoch steht die Sonne (Höhenwinkel!), wenn ein 30m hoher Turm auf einer horizontalen Ebene einen Schatten der Länge 45m wirft ?

43. In einem Kreis mit der Fläche 25 hat eine Sehne die Länge 5. Wie gross ist der zugehörige Mittelpunktswinkel ?

44. Eine quadratische Pyramide hat Grundkanten der Länge 4 und Seitenkanten der Länge 3. Bestimme den Winkel α zwischen Grundfläche und Seitenkante, den Winkel β zwischen Grundkante und Seitenkante sowie das Volumen der Pyramide ($V = G \cdot h/3$).

45. Zwei Kreise haben die gemeinsame Sehne s = 20. Die zugehörigen Mittelpunktswinkel sind $\alpha = 140°$ und $\beta = 70°$. Berechne:
a) die Entfernung der Mittelpunkte
b) die beiden Radien
c) das beiden Kreisen gemeinsame Flächenstück.

46. Berechne den Umfang eines regelm. 17-Ecks mit Fläche $F = 717m^2$.

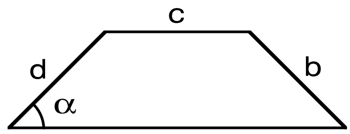
47. **Beweise**: in jedem Dreieck gilt a) $b = c \cdot \cos\alpha + a \cdot \cos\gamma$
b) $F = 2r^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$

48. Ein Pendel der Länge 3m wird bei seiner Auslenkung um 50cm angehoben.
Berechne a) den Auslenkwinkel φ b) die Länge der Pendelbahn von der Ruhelage bis zum Ausschlag.

49. Zwei Schülerinnen A und B betrachten auf der Wandtafel einen Punkt. Für A erscheint dieser Punkt unter dem Höhenwinkel $\alpha = 5°$, für B unter $\beta = 12°$. B sitzt 5m näher an der Tafel als A. Die Augenhöhe von A und von B ist 1.4m. Wieviele Meter über dem Boden befindet sich der Punkt?

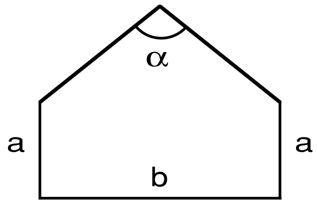
50. Beweise: Für die Fläche F jedes Dreiecks ABC gilt: $F = 0.5 \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$

51. In einem Trapez ist $b = c = d = 5\,cm$ und $\alpha = 62°$. Berechne die Basis a und die Diagonale e.



52. Berechne die Fläche der skizzierten Frontseite eines Hauses. (Das Dach ist symmetrisch.)

$a = 4\,m$, $b = 10\,m$, $\alpha = 100°$



53. Ein Parallelogramm ist gegeben durch a, b und α. Gib eine Formel mit diesen Grössen zur Berechnung des Flächeninhalts an.

54. Gegeben ist ein Kreis um M vom Radius $r = 3\,cm$ und ein Punkt P im Abstand $d = 7\,cm$ von M. Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Tangenten, welche von P aus gezeichnet werden können?

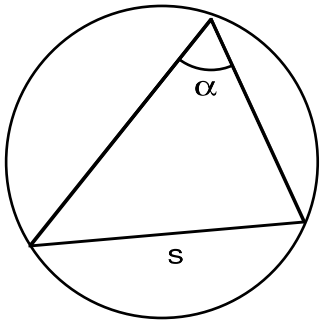
55. Im Kreissektor mit Radius $r = 5\,cm$ und Zentriwinkel $\alpha = 42°$ wird die Sehne eingezeichnet.
a) Wie lang ist sie?
b) Wieviel % der Sektorfläche liegen zwischen der Sehne und dem Bogen?

56. Berechne die Hypotenuse c eines rechtwinkligen Dreiecks aus der Seite $b = 4\,cm$ und der Winkelhalbierenden $w_\alpha = 4.5\,cm$.

57. Ein rechtwinkliges Dreieck ist gegeben durch $\gamma = 90°$, $\alpha = 62°$ und $w_\alpha = 3.19\,cm$. Berechne die Länge der Kathete a.

58. Berechne alle Seiten eines Dreiecks aus dem Winkel $\gamma = 90°$, der Höhe $h_c = 4\,cm$ und der Winkelhalbierenden $w_\gamma = 4.5\,cm$.

59. Der Peripheriewinkel α über der Sehne $s = 4.6\,cm$ misst 52°. Wie gross ist der Kreisradius?



60. In einem Kreis mit Radius r = 7cm wird parallel zu einem Durchmesser eine Sehne eingezeichnet, und zwar im Abstand von 2cm. Berechne den Inhalt des Flächenstücks zwischen den beiden Strecken.

61. Berechne die Seiten eines gleichschenkligen Trapezes aus der Mittellinie m, der Höhe h und dem Winkel α.
$m = 50\,cm$, $h = 10\,cm$, $\alpha = 65.5°$

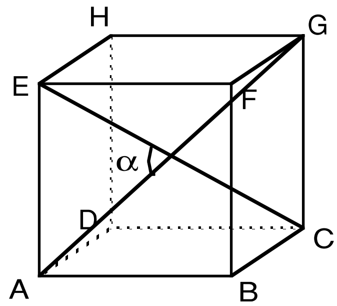
62. Gib eine allgemeine Formel für die Berechnung des Umfangs eines regulären n-Ecks aus dem Umkreisradius r und der Eckenzahl n an.

63. Berechne die Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks aus dem Inkreisradius $\rho = 3.46\,cm$ und $\alpha = 35.4°$.

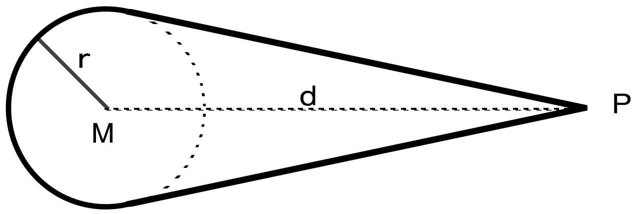
64. Skizziere die Eckpunkte eines regulären Fünfecks. Zeichnet man nun statt den Seiten alle Diagonalen ein, so entsteht ein reguläres Sternfünfeck. Berechne dessen Flächeninhalt aus dem Umkreisradius r = 7cm.

65. Der Umkreisradius eines regulären 5-Ecks misst 7.5cm. Berechne den Inkreisradius.

66. Die Kanten des Würfels haben die Länge a. Berechne den (spitzen) Schnittwinkel α der beiden Würfeldiagonalen AG und CE.

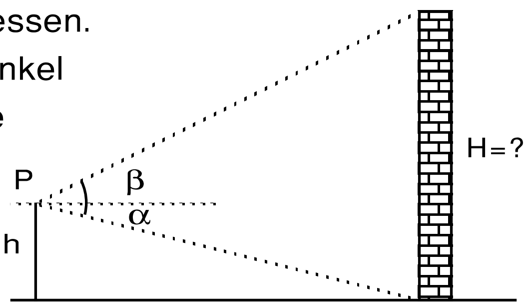


67. Berechne den Flächeninhalt dieser Figur.
$r = 4\,cm$
$d = PM = 9.5\,cm$

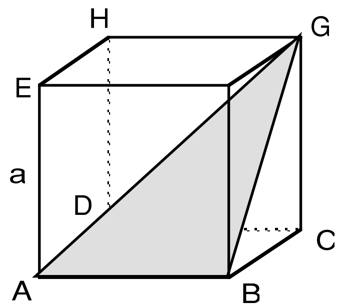


68. Vom Punkt P aus wird ein Kamin vermessen. P liegt h Meter über dem Boden. Die Winkel α und β werden gegen die Horizontale gemessen. Berechne die Höhe H.

$h = 14\,m$, $\alpha = 6.11°$, $\beta = 13.95°$



69. Betrachte den Würfel mit Kantenlänge a. Berechne die Winkel und den Flächeninhalt des Dreiecks ABG.



70.

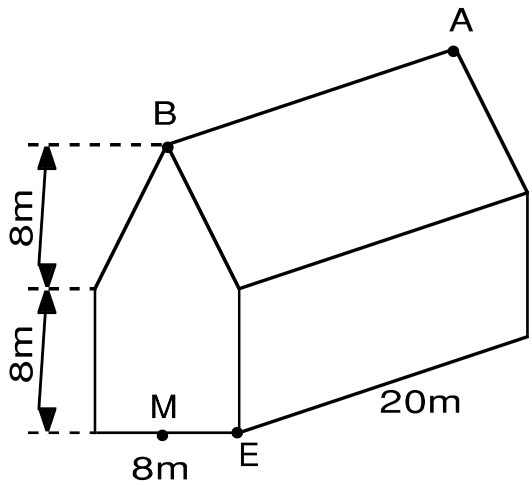
M: Kantenmitte.

Berechne:

a) $\alpha = \sphericalangle BAM$

b) β : Winkel zwischen AE und der Bodenfläche

c) γ : Winkel zwischen den Dachflächen



71. Bestimme V, M und O sowie den Oeffnungswinkel α eines geraden Kreiskegels mit dem Grundkreisradius r = 2m und der Höhe h = 5m.

72. Der Winkel α zwischen einer Seitenkante und der Grundfläche einer geraden quadratischen Pyramide ist 67.8°. Die Grundkante misst 21.3cm. Berechne h und V der Pyramide sowie den Winkel β zwischen zwei benachbarten Seitenkanten.

Trigonometrie 2: Definitionen

73. Skizziere den Graphen von $y = \sin \varphi$ für $810^0 \leqslant \varphi \leqslant 1350^0$.
Welche Symmetrieachsen (Achsensymmetrie) und welche Symmetriezentren (Punktsymmetrie) der **ganzen** Sinuskurve liegen in diesem Bereich?
Gib die **Gleichungen** dieser Achsen und die **Koordinaten** dieser Zentren an.

74. a) $\sin \varphi = -0.45$ (**alle** Lösungen angeben)
b) $-2 \leqslant \tan \varphi \leqslant -0.3$ ($0° \leqslant \varphi \leqslant 360°$)

75. Löse: a) $\sin x = -0{,}456$; $x \in [0, 2\pi]$; stelle die Lösung(en) auch am Graphen dar (Skizze).
b) $0{,}234 \geq \cos\varphi \geq -0{,}567$; $\varphi \in [0^0, 360^0]$; stelle die Lösungen auch am EK dar (Skizze).

76. Skizziere (grosso modo) den Graph von $y = \cot\varphi$ für $-990° \leq \varphi \leq -630°$.

77. Bestimme **alle** Winkel $\varphi \in [0°, 360°]$, bzw. $x \in [0, 2\pi]$, für die gilt:
a) $\sin\varphi = -0.4$ b) $\cot x = 1/3$ c) $|\cos\varphi| \geq 0.2$
d) $0.2 < \tan x < 1.7$

78. Bestimme **alle** Winkel x (im Bogenmass !), für die $\cot x = -1$.

79. Bestimme alle Winkel $\varphi \in [0°, 360°]$, für die gilt:
a) $\sin\varphi = 0.456$ b) $\cos\varphi = -0.432$ c) $\tan\varphi = 5.67$
d) $\cot\varphi = -0.567$ e) $-0.3 \leq \sin\varphi \leq 0.4$

80. Bestimme den kleinsten positiven Winkel φ, für den gilt:
a) $\sin\varphi = \sin(-11559°)$ b) $\tan\varphi = \tan 9937°$

81. Es gilt: $\sin(-27°) = \sin(360° - 27°) = \sin 333° = -\sin 27°$;
und allgemein: $\mathbf{\sin(-\varphi) = \sin(360° - \varphi) = -\sin\varphi}$.
Suche mit Hilfe der Darstellung am EK entsprechende Formeln für $\cos(-\varphi)$, $\tan(-\varphi)$ und $\cot(-\varphi)$.

82. Wie ist der Tangens eines **beliebigen** Winkels φ definiert ? (Antwort mit ein paar Sätzen und **ohne** Skizze)

83. a) Bestimme alle Winkel φ mit $0° \leq \varphi \leq 360°$, für die gilt: $-0.3 < \sin\varphi \leq 0.4$.
b) Stelle die Lösungen mit Hilfe des Graphen von $y = \sin x$ dar.

84. Bestimme alle Winkel $\alpha \in [0°; 360°]$, für die gilt: $\cos^2\alpha = 0{,}6$

85.

Berechne die beiden Hauptwerte und runde auf 2 Stellen nach dem Komma:

$\sin\alpha =$	0.98	$\alpha_1 =$	$\alpha_2 =$
$\cos\alpha =$	-0.37	$\alpha_1 =$	$\alpha_2 =$
$\tan\alpha =$	-0.38	$\alpha_1 =$	$\alpha_2 =$
$\sin\alpha =$	-0.72	$\alpha_1 =$	$\alpha_2 =$
$\cos\alpha =$	0.44	$\alpha_1 =$	$\alpha_2 =$
$\cot\alpha =$	0.10	$\alpha_1 =$	$\alpha_2 =$

86. Berechne die beiden Hauptwerte und runde auf 2 Stellen nach dem Komma:

$\sin\alpha =$	0.14	$\alpha_1 =$	$\alpha_2 =$
$\cos\alpha =$	-0.02	$\alpha_1 =$	$\alpha_2 =$
$\tan\alpha =$	-0.68	$\alpha_1 =$	$\alpha_2 =$
$\sin\alpha =$	-0.37	$\alpha_1 =$	$\alpha_2 =$
$\cos\alpha =$	0.40	$\alpha_1 =$	$\alpha_2 =$
$\cot\alpha =$	0.60	$\alpha_1 =$	$\alpha_2 =$

87. Bestimme den **kleinsten positiven** Winkel x (Bogenmass!), für den gilt:
a) $\sin x = \sin(-100'000)$ b) $\tan x = \tan 360'000$

88. Bestimme alle Winkel $x \in [0; 2\pi]$, für die gilt $\cos^2 x = 0.6$

89. Löse: $\tan^2(x) = 1.2$ (**alle** Lösungen, Bogenmass)

Trigonometrie 2: Grundaufgaben

90. Berechne die fehlenden Seiten und Winkel im Dreieck aus:
a) $b = 30.5$; $c = 37.5$; $\alpha = 104°$ b) $a = 46$; $b = 74$; $\alpha = 36.5°$

91. Von einem Viereck ABCD sind bekannt: $a = 37{,}26$; $b = 59{,}84$; $f = 63{,}72$; $\alpha = 111{,}1°$; $\beta = 98{,}27°$. Berechne $e = \overline{AC}$ und $d = \overline{AD}$.

92. <u>Beweise:</u> Die Summe der Quadrate über den 4 Seiten und die Summe der Quadrate über den 2 Diagonalen sind in einem Parallelogramm gleich.

93. Berechne die fehlenden Seiten und Winkel im Dreieck aus:
a) $b = 30{,}5$; $c = 37{,}5$; $\alpha = 104°$ b) $a = 46$; $b = 74$; $\alpha = 36{,}5°$

94. Berechne die fehlenden Seiten und Winkel im Dreieck aus:
$c = 2{,}3$; $a = 3{,}7$; $\gamma = 36{,}5°$ b) $a = 150$; $c = 121$; $\beta = 104°$

95. Berechne die Dreiecke aus den angegebenen Stücken:
a) $a = 5$; $b = 18$; $c = 14$ b) $\beta = 115°$; $\gamma = 20°$; $b = 4$
c) $a = 77$; $b = 58$; $\beta = 36°$ d) $a = 74.6$; $b = 78.0$; $\gamma = 42.5°$

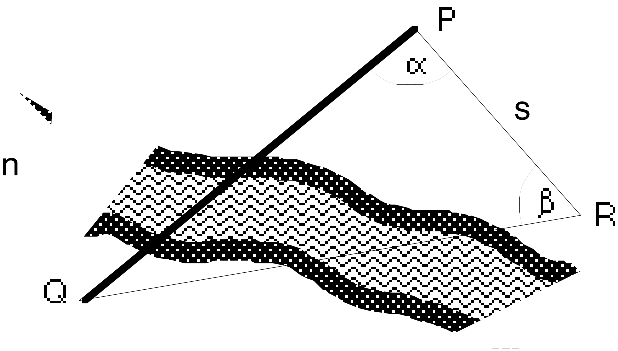
96. Berechne die Dreiecke aus den angegebenen Stücken:
a) $a = 5$; $b = 18$; $c = 14$ b) $\beta = 115°$; $\gamma = 20°$; $b = 4$
c) $a = 77$; $b = 58$; $\beta = 36°$

97. Berechne den kleinsten Winkel des Dreiecks ABC, gegeben durch
$a = 12.5\,\text{cm}$, $b = 10.92\,\text{cm}$ und $c = 15.55\,\text{cm}$.

98. Ein Dreieck ist gegeben durch a = 4.6cm, β = 36.3° und γ = 66.8°. Berechne α, b und c.

99.

Die Distanz $\overline{PQ}$ über einen Fluss hinweg soll mit Hilfe des zusätzlichen Punktes R berechnet werden.
Messungen:
α = 47.7° , β = 97.2° , s = 86.4m



100. Gegeben ist ein Dreieck durch α = 64°, a = 3cm und c = 1.9cm. Berechne die Länge der Seite b.

101. Berechne fehlende Seiten und Winkel im Dreieck aus b = 18cm, c = 15cm, β = 80°

102. Berechne die fehlenden Seiten und Winkel des gegebenen Dreiecks.
a = 12cm, b = 9cm, γ = 60°

103. Berechne fehlende Seiten und Winkel im Dreieck aus a = 46, b = 74, α = 36.5°

Trigonometrie 2: Anwendungen

104. Auf der Spitze eines Turmes steht eine 8m hohe Fahnenstange. Von einem Punkt A auf dem waagrechten Platz vor dem Turm werden die Enden der Fahnenstange unter den Höhenwinkeln α_1 = 69° und α_2 = 72° gesehen.
Wie hoch ist der Turm ? Lösung a) allgemein, b) numerisch.

105. Zwei Kreise mit den Radien R = 6 und r = 4 haben den Mittelpunktsabstand m = 8. Berechne: a) die Länge der gemeinsamen Sehne b) den Inhalt des Flächenstückes, das zu beiden Kreisen gehört.

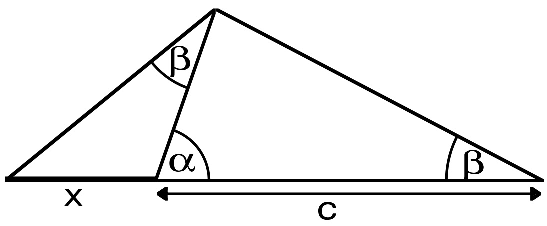
106. Berechne fehlende Seiten und Winkel im Dreieck aus :
a) a = 11,4 ; c = 15,2 ; α = 35,9° b) b = 26,5 ; γ = 155° ; a = 99,7
c) α = 64,4° ; c = 90,8 ; Inkreisradius ρ = 22,2

107. Eine Kraft $F = 776N$ soll in 2 Komponenten $F_1 = 237N$ und $F_2 = 697N$ zerlegt werden. Berechne die Winkel zwischen der Richtung von F und den Richtungen der Komponenten.

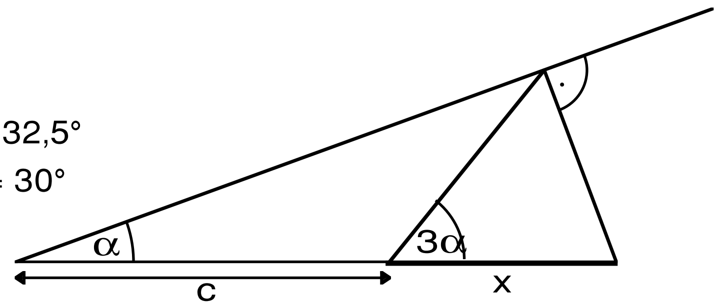
108. Zwischen den Punkten P und Q liegt ein Hindernis so, dass die Strecke $\overline{PQ}$ nicht direkt gemessen werden kann. Zur Bestimmung von $\overline{PQ}$ werden nun zwei Punkte A und B auf **derselben** Seite der Geraden (PQ) gewählt. Es wird gemessen:
$\overline{AP} = 345.7m$; $\overline{AB} = 287.3m$; $\overline{BQ} = 264.9m$; $\sphericalangle PAB = 102.7°$; $\sphericalangle ABQ = 97.4°$; **$\overline{PQ}$ = ?**

109. Die Schenkel eines 60°-Winkels mit Scheitel S werden von einer Geraden so in den Punkten X und Y geschnitten, dass gilt: $\overline{SX} : \overline{SY} = 5 : 6$ und $\overline{XY} = 7$. Berechne $\overline{SX}$ und $\overline{SY}$.

110. a) Bestimme x aus c, α, β
b) Berechne x, wenn $c = 52,4$, $\alpha = 70,5°$ $\beta = 39,5°$
c) Untersuche den Spezialfall $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$



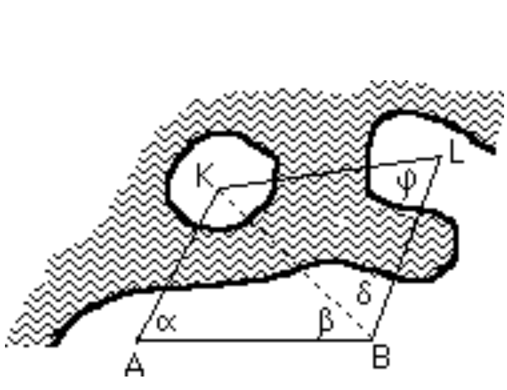
111.
a) Bestimme x aus c und α
b) Berechne x für $c = 7,26$ und $\alpha = 32,5°$
c) Untersuche den Spezialfall: $\alpha = 30°$



112. Berechne Winkel, Diagonalen und die Fläche eines Trapezes aus $a = 748$, $b = 532$, $c = 306$, $d = 454$.

113. In einem Sehnenviereck ist $a = 5,0$; $b = 3,2$; $d = 3,4$; $\alpha = 80°$. Berechne f, c, β.

114. Berechne die Entfernung des Kontrollturmes K auf der Insel vom Leuchtturm L auf dem Festland aus den gemessenen Grössen $\overline{AB} = 3.50km$, $\alpha = 75°$, $\beta = 58°$, $\delta = 35°$, $\varphi = 42°$



115. Von einem Dreieck ist bekannt: a = 6; b = 3; c = 4.
Bestimme α, β, γ, h_b.

116. Ein Parallelogramm ist gegeben durch die Seiten AB = 6 cm und AD = 4 cm sowie die Diagonale AC = 9 cm. Berechne den Winkel α.

117. Ein Viereck ist gegeben durch AB = a = 4 cm, AD = d = 3 cm, α = 130°, γ = 40° und δ = 80°. Berechne die Länge der Seite b.

118. Ein Dreieck ist gegeben durch γ = 132°, a = 8.3 cm und Winkelhalbierende w_γ = 3.1 cm. Berechne die Länge der Seite b.

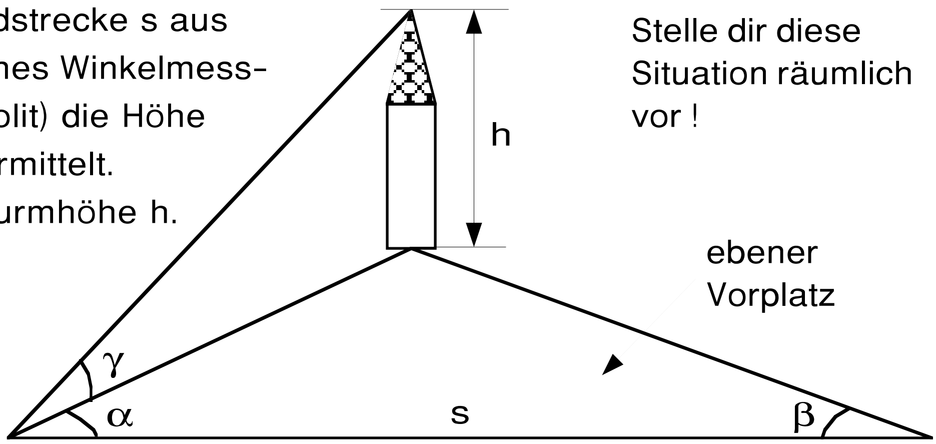
119. Ein Viereck ist gegeben durch AB = a = 5.55 cm, BC = b = 2.2 cm, AD = d = 4.7 cm, α = 101.2° und γ = 52.08°. Berechne die Länge der Seite c.

120. Ein Viereck ist gegeben durch AB = a = 5 cm, BC = b = 6 cm, α = 18°, β = 90° und γ = 25°. Zeichne eine recht genaue Figur und berechne die Seiten c und d.

121. Von einer Grundstrecke s aus wird mit Hilfe eines Winkelmessgerätes (Theodolit) die Höhe eines Turmes ermittelt.
Berechne die Turmhöhe h.

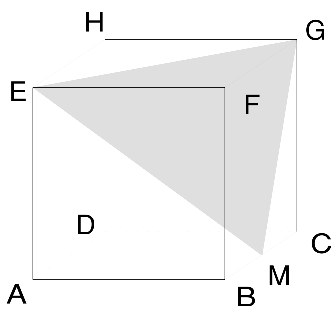
Stelle dir diese Situation räumlich vor !

Messwerte:
$\alpha = 70°$
$\beta = 35°$
$\gamma = 12°$
s = 200 m



122. Berechne die Winkel und den Flächeninhalt des Dreiecks EGM.

Die Würfelkanten messen 6 cm,
M ist die Mitte der Würfelkante BC.



123. Ein Flugzeug überfliegt mit der Eigengeschwindigkeit v_1 = 200km/h und dem Steuerkurs ϵ = 275° den Punkt P. Nach 8 Minuten überfliegt es den Punkt Q. Q liegt 30km von P entfernt in der Richtung α = 287°.
Bestimme die Richtung φ und die Geschwindigkeit v_2 des Windes, der das Flugzeug versetzt (alle Winkel rechtsweisend).

Trigonometrie 2: Gleichungen, Identitäten

124. Wo nichts anderes verlangt: gesuchte Winkel im Gradmass aus [0°, 360°].

a) $0{,}5 \cdot \cos x = 3 \cdot \sin x$ b) $\tan x + \tan 2x = 0$

c) $6 \cdot \cos^2 x - \sin^2 x = \sin x \cdot \cos x$

d) $\cos^2 x \geqslant 0{,}7$; $x \in [0, 2\pi]$

e) Gegeben: $\cos \alpha = 0{,}8$. Gesucht: $\sin(60° - \alpha)$
(ohne Taschenrechner, Ausrechnung angeben)

125. In einem Dreieck misst ein Winkel 60° und das Verhältnis der Sinuswerte der beiden anderen Winkel ist 4 : 1. Berechne diese Winkel.

126. $2 \cdot \cos^2 x - 7 \cdot \cos x + 3 = 0$

127. $\sin x \cdot \cos x + 3 \cdot \cos^2 x = 0$

128. $4 \cdot \sin x + 6 \cdot \cos x = 1$

129. $\sin^4 x = \frac{2}{3} - \cos^4 x$

130. $\sin 2x \leqslant 0{,}4$; $x \in [0, 2\pi]$

131. Von einer Stelle am Boden aus erscheint das 8-te Stockwerk eines Hochhauses unter dem Höhenwinkel α, das 20-te Stockwerk unter dem Höhen- winkel 2α. Die Stockwerke sind alle gleich hoch. Berechne α.

132. Löse: a) $\cos 2x \leqslant 2\cos x$ b)
$$\left| \begin{array}{l} \sin x + \sin y = \sqrt{\frac{3}{2}} \\ x + y = 90° \end{array} \right.$$

133. Löse:

a) $2\sin^2 x + 3\sin x + 12 = 0$

b) $4\sin^2 x + 2\cos^2 x = 1$ (x im Bogenmass angeben)

c) $6\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 0$ (x im Bogenmass angeben)

134. Bestimme alle Lösungen zwischen 0° und 360°:

a) $\sin x = 0.7 \cdot \cos x$ b) $\cos^2 x - \cos x = 0.75$

135. Bestimme alle Lösungen zwischen 0° und 360°:

a) $\sin(x+27°) = 0$ b) $\tan^2 x - \tan x = 0$

136. Bestimme alle Lösungen zwischen 0° und 360°:

a) $\cos^2 x = 1$ b) $5\cos^2 x + 7\sin x + 7 = 0$

137. Bestimme alle Lösungen zwischen 0° und 360°:

a) $\cos^2 x = 4\sin^2 x$ b) $\sin 2x = \tan x$

138. Bestimme alle Lösungen zwischen 0° und 360°:

a) $\sin x = -0.125$ b) $4\sin^2 x - \cos^2 x = 1$

139. Bestimme alle Lösungen zwischen 0° und 360°:

a) $\cos x = 4\sin x$ b) $\cos x = 5\cos^2 x - {}^1/_4$

140. Beweise: $\cos(45° + \alpha) + \cos(45° - \alpha) = \sqrt{2} \cdot \cos \alpha$

141. Leite die Formel für $\cos(\alpha - \beta)$ aus der für $\sin(\alpha + \beta)$ her.

142. Berechne aus den Funktionswerten für 30°, 45°, 60° :

a) tan 75° b) sin 15° c) cos 11,25°

(Terme möglichst vereinfachen, Wurzeln stehen lassen,

es gilt: $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$)

143. Beweise: $\cot \alpha - \tan \alpha = \frac{2}{\tan 2\alpha}$

144.

a) Beweise: $\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$

b) Berechne aus den Funktionswerten für 30°, 45°, 60° (Formelsammlung!): sin15° , tan75° , cos7,5° . Die Formel von a) darf benützt werden, Terme möglichst vereinfachen, Wurzeln stehen lassen.

145. Vereinfache:

a) $\sin\alpha : \tan\alpha$ b) $\cos^4\beta - \sin^4\beta$

146. Beweise:

$$\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)) = \cos\alpha \cdot \cos\beta$$

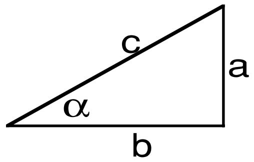
147. Vereinfache: $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$

148. Vereinfache: $\cos(60°+\alpha) + \cos(60°-\alpha)$

149. Beweise: $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$
(Beginne so: $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \ldots$ und verwende die Formeln aus der Formelsammlung!)

Trigonometrie: Lösungen

1.

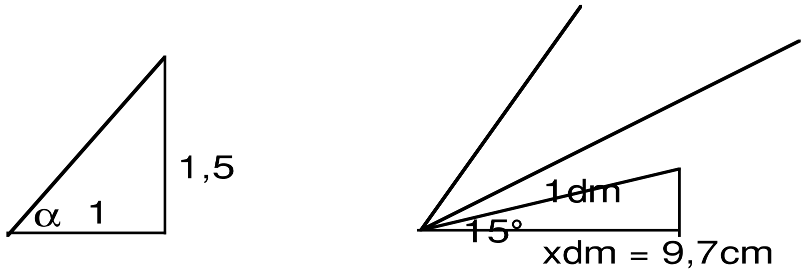


a) $\cos\beta = a/c = \sin\alpha = \sin(90° - \beta)$

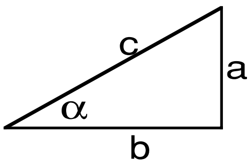
b) $1 + \tan^2\alpha = 1 + a^2/b^2 = (b^2 + a^2)/b^2 = c^2/b^2 = 1/(b/c)^2 = 1/\cos^2\alpha$

2. $\mathbf{\sin\varphi} = \sqrt{(1-c^2)} \mathbf{= 0{,}7141}$; $\mathbf{\tan\varphi} = \sqrt{(1-c^2)}/\cos\varphi \mathbf{= 1{,}020}$;
$\mathbf{\cot\varphi} = \cos\varphi/ \sqrt{(1-c^2)} \mathbf{= 0{,}9802}$

3.



4.

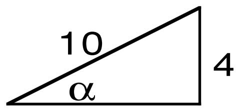


$\cos\alpha = b/c = \sin\beta = \sin(90° - \beta)$
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = a^2/c^2 + b^2/c^2 = (a^2 + b^2)/c^2 = 1$
$1 + \sin^2\alpha/\cos^2\alpha = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)/\cos^2\alpha = 1/\cos^2 a$;

5. $\sin\epsilon\varphi = \sqrt{(1 - c^2)} = \mathbf{0{,}8}$; $\tan\varphi = 0{,}6/0{,}8 = \mathbf{3/4}$; $\cot\varphi = 1/\tan\varphi = \mathbf{4/3}$

6. **x = 1,22 —> 70,0°**

7.



8. a) $(1 - c^2)/c^2 = s^2/c^2 = \mathbf{\tan^2\alpha}$ b) $s(s^2 + c^2) = \mathbf{\sin\alpha}$

9. $\mathbf{\sin\delta = 1/\sqrt{1+\cot^2\delta}}$

10. **sin x = 0,746; x = 131,9°**

11. $1 + (c^2 - s^2) = c^2 - (1 - c^2) = \mathbf{2c^2 - 1 = 1 - 2s^2}$

12. rw.Δ mit Hypotenuse c = 1 und α = 60° (sww). ==> **sin 60° = a**

13. rw.Δ mit den Katheten b = 1 und a = 1,5; ==> **α**

14. gls.Δ mit Seite = 1 und Höhe h; ==> cos30° = h/1 = $\mathbf{\sqrt{3}/2}$

15. Dasselbe für $\cos\beta$, wenn $\tan\beta = 4$.

a) $\sin^2\alpha = 1 - c^2$ ===> $\mathbf{\sin\alpha = 0{,}9429}$

b) $t^2 = s^2/c^2 = (1-c^2)/c^2$ ==> $c^2t^2 + c^2 = 1$; $c = 1/\sqrt{1+t^2} = 1/\sqrt{17} = \mathbf{0{,}24254}$

16. halbes gls Δ

17. 60° vierteln; rwΔ mit $\alpha = 75°$ und $b = 1$ ==> $\mathbf{\tan 75° = a}$

18. a) $1/24 \cdot \pi$ b) 0.1309

19. a) $\mathbf{c = b/\cos\alpha = 10{,}0}$; $\mathbf{a = b \cdot \tan\alpha = 6{,}03}$

b) $F = ab/2$ und $\tan\beta = b/a$; ==> $b = a \cdot \tan\beta$ in I ==> $\mathbf{a = \sqrt{2F/\tan\alpha} = 38{,}9}$;

==> $\mathbf{b = \sqrt{2F \cdot \tan\alpha} = 7{,}56}$;

$c^2 = a'' + b^2$ ==> $\mathbf{c = \sqrt{2F(\tan\alpha + \cot\alpha)} = 39{,}6}$

20. a) $\mathbf{\beta = 90° - \alpha = 33{,}7°}$; $\mathbf{c = b/\cos\alpha = 6{,}795}$; $\mathbf{a = b \cdot \tan\alpha = 5{,}653}$

b) $\mathbf{a = 90° - \beta = 62{,}5°}$;

$F = ab/2$; $\tan\beta = b/a$; ==> $\mathbf{b = \sqrt{(2F \cdot \tan\beta)} = 3{,}749}$;

$\mathbf{a = \sqrt{(2F/\tan\beta)} = 7{,}20}$

$\mathbf{c} = \sqrt{(2F\tan\beta + 2F/\tan\beta)} = \mathbf{\sqrt{((2F(\tan^2\beta + 1)/\tan\beta)}}$

$= b/\sin\beta = \mathbf{\sqrt{(2F/\sin\beta\cos\beta)} = 8{,}119}$

21. $\sin\alpha = h/b$ ==> $\mathbf{b = h/\sin\alpha = 45{,}3}$; $\cos\alpha = h/a$ ==> $\mathbf{a = h/\cos\alpha = 18{,}6}$

$\mathbf{c = \sqrt{a^2 + b^2}} = a/\sin\alpha = \mathbf{h/(\sin\alpha \cdot \cos\alpha) = 49{,}0}$

22. $b/2 = s \cdot \cos\alpha$; $h = s \cdot \sin\alpha$; ==> $F = s^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$;

$\mathbf{s} = \sqrt{(F/(\sin\alpha \cdot \cos\alpha))} = \mathbf{16{,}2}$ $\mathbf{b} = 2s \cdot \cos\alpha = 2\sqrt{(F \cdot \cot\alpha)} = \mathbf{26{,}0}$

23. a) d) $\mathbf{c = b/\sin\beta = 21{,}90}$; $\mathbf{a = b/\tan\beta = 17{,}40}$; $\mathbf{\alpha = 90° - \beta = 52{,}6°}$

b) $\sin\beta = h/a$ => $\mathbf{\beta = 49{,}16°}$; $\mathbf{\alpha} = 90° - \beta = \mathbf{40{,}84°}$; $\mathbf{b} = h/\cos\beta = \mathbf{527.6}$;

$\mathbf{c = 697.3}$

c) $ab = 2F$, $a/b = \tan\alpha$; ==> $\mathbf{a} = \sqrt{(2F \cdot \tan\alpha)} = \mathbf{7{,}321}$;

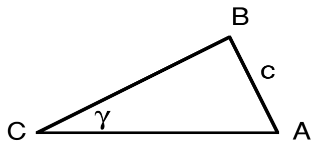
$\mathbf{b} = \sqrt{(2F/\tan\alpha)} = \mathbf{27{,}32}$; $\mathbf{c = 28{,}28}$; $\mathbf{\beta = 75°}$

24. $h = s \cdot \sin\beta = 5.362$; $b/2 = s \cdot \cos\beta = 4.4995$; $F = s^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \mathbf{24.13}$

25.

a)	$c = \mathbf{13.20}$	$\alpha = \mathbf{72.64°}$	$\beta = \mathbf{17.36°}$
b)	$b = \mathbf{11.31}$	$c = \mathbf{13.73}$	$\beta = \mathbf{55.44°}$
c)	$a = \mathbf{20.63}$	$b = \mathbf{37.74}$	$\alpha = \mathbf{28.67°}$

26. $a = c / \tan\gamma = \mathbf{8.44\ cm}$



27. $b = \mathbf{44.73\ cm}$, $c = \mathbf{51.24\ cm}$

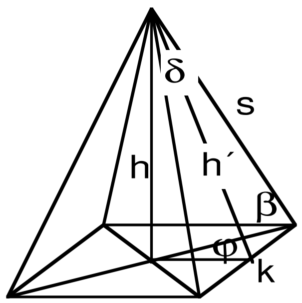
28. $\alpha = 2 \cdot \arctan b/a = \mathbf{61.48°}$

29. $a = b / \tan\beta = \mathbf{40.55\ cm}$
$c = b / \sin\gamma = \mathbf{51.04\ cm}$

30. $a = b \cdot \tan\alpha = \mathbf{1.02\ cm}$
$c = b / \cos\alpha = \mathbf{2.61\ cm}$

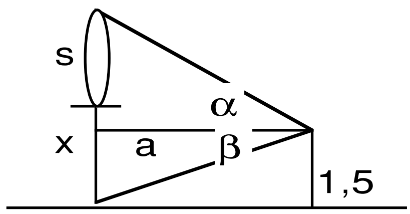
31. $\tan\alpha/2 = r/AS \Longrightarrow \mathbf{AS} = r/\tan\alpha = \mathbf{34{,}50}$
$AB = s$; $\cos\alpha/2 = (s/2)/r \Longrightarrow \mathbf{s} = 2r\cos\alpha/2 = \mathbf{27{,}51}$
$\sphericalangle AMB = 2(90° - \alpha/2) = 180° - \alpha \Longrightarrow$ **Bogen AB** $= \pi r(180° - \alpha)/180° = \mathbf{34{,}82}$

32.



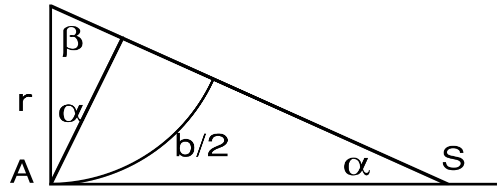
$\tan\beta = h/(d/2) \Rightarrow \mathbf{h} = 0.5 \cdot k \cdot \sqrt{2} \cdot \tan\beta = \mathbf{10{,}3}$
$\cos\beta = (d/2)/s \Rightarrow \mathbf{s} = k\sqrt{2}/(2 \cdot \cos\beta) = \mathbf{10{,}9}$
$h' = \sqrt{(h^2 + k^2/4)} = \sqrt{(s^2 - k^2/4)} = 10{,}5679$
$\mathbf{F} = k^2 + 4 \cdot 0{,}5 \cdot kh' = \mathbf{131}$
$\sin\delta/2 = (k/2)/s$; $\tan(\delta/2) = (k/2)/h'$; $\Longrightarrow \boldsymbol{\delta} = \mathbf{26{,}6°}$
$\tan\varphi = h/(k/2)$; $\cos\varphi = (k/2)/h'$; $\Longrightarrow \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{76{,}3°}$

33.



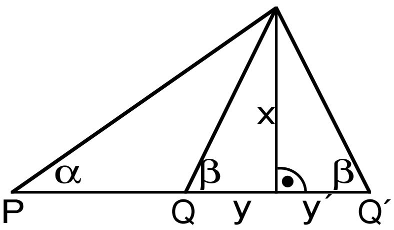
$\tan\beta = 1{,}5/a \Longrightarrow \beta = 8{,}5308°$; $\alpha = 26.469$
$(s + x - 1{,}5) = 4.9791$
$\tan\alpha = \tan(35° - \beta) = (s + x - 1{,}5)/a$
$\Longrightarrow \mathbf{x} = a \cdot \tan(35° - \beta) - s + 1{,}5 = \mathbf{3{,}4791}$

34. $h = AB/2 = 13{,}5$; $\alpha = 67°/2 = 33.5°$
$\beta = 90° - \alpha = 56{,}5°$
$r = 13{,}5/\sin 56{,}5° = 16{,}19$
$b = \pi r \cdot 2 \cdot 56{,}5°/180° = 31{,}93$
$AS = 13{,}5/\sin 33{,}5° = 24{,}46$
Einsparung: $2 \cdot AS - b =$ **16,99 (Fuss)**
(Bogen beet-einwärts: Einsp.:$2 \cdot PS - PQ = 21{,}92$)



35. $\tan\beta = x/y$ | oder: $\tan\beta = x/y'$

$\tan\alpha = x/(a+y)$ | $\tan\alpha = x/(a-y')$

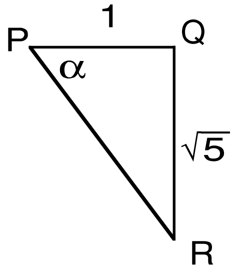


$\Rightarrow x = a \cdot \tan\alpha \cdot \tan\beta / (\tan\beta \pm \tan\alpha)$

$=$ **1,44km oder 1,82km**

Variante: $x = a/(\cot\alpha \pm \cot\beta)$

36. a) $\tan\alpha = \sqrt{5}$

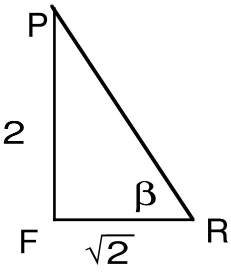


α = 65,91°

b)

$\tan\beta = 2/\sqrt{2}$

β = 54,73°



37. $r = R \cdot \cos\varphi = 4254$; $\alpha = 16{,}5° - 11{,}6° = 4{,}9°$; $\mathbf{b} = 2\pi \cdot R\cos\varphi \cdot 4{,}9/360 =$ **364km**

38. $F = r^2 \cdot x/2$; $\mathbf{b} = r \cdot x = x \cdot \sqrt{2F/x} = \sqrt{2Fx} =$ **1m** ($x \longrightarrow \varphi = 28{,}6° \longrightarrow r = 2 \longrightarrow b$)

39. $\varphi = 360°/2 \cdot 19$; $h = r \cdot \cos\varphi$; $s_{19}/2 = r \cdot \sin\varphi$; $F/19 = r^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi$;

$\Rightarrow r^2 = F/(19 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi)$; $r = 0{,}569\text{m}$, $s_{19} = 2 \cdot r \cdot \sin\varphi =$ **0,187m**

40. $\tan\varphi = PF/QF \Rightarrow QF = PF/\tan\varphi = 62{,}831 \Rightarrow RF = 5{,}469$

$\Rightarrow \mathbf{PR} = \sqrt{RF^2 + PF^2} =$ **30,2**

41. a) $\tan\alpha = 5/11$; **α = 24,44°**

b) $\sphericalangle TMB = \beta$; a) $\Rightarrow \beta/2 = 32{,}778°$; $\mathbf{s} = 2r \cdot \sin(\beta/2) =$ **5,4139**;

$\mathbf{a} = r \cdot \cos(\beta/2) =$ **4,2039**

42. $\tan\varphi = 30/45 \Rightarrow$ **φ = 33,7°**

43. $\sin\alpha/2 = (s/2)/r = s\sqrt{\pi}/(2\sqrt{F}) = 5\sqrt{\pi}/2 \cdot 5 = \sqrt{\pi}/2 = 0{,}886 \Rightarrow$ **α = 124,8°**

44. halbes DiagonalschnittΔAMS: $\cos\alpha = (4 \cdot \sqrt{2}/2)/3 = 2\sqrt{2}/3 \Rightarrow$ **α = 19,5°**

Seitenfläche = glschΔ Schenkel = 3 , Basis = 4, $\Rightarrow \cos\beta = 2/3 \Rightarrow$ **β = 41,4°**

$MS^2 = 3^2 - (4\sqrt{2}/2)^2 = 9 - 8 = 1 = h$; $\mathbf{V} = G \cdot h/3 =$ **16/3 = 5,33**

45. $\tan(\alpha/2) = (s/2)/h_1$; $h_1 = s/(2 \cdot \tan 70°) = 3{,}639$; $h_2 = s/(2 \cdot \tan 35°) = 14{,}281$;

$\mathbf{M_1M_2 = h_1 + h_2 = 17{,}9}$

$r_{12} = s/(2 \cdot \sin(\alpha,\beta/2))$; $\mathbf{r_1 = 10{,}6}$; $\mathbf{r_2 = 17{,}4}$

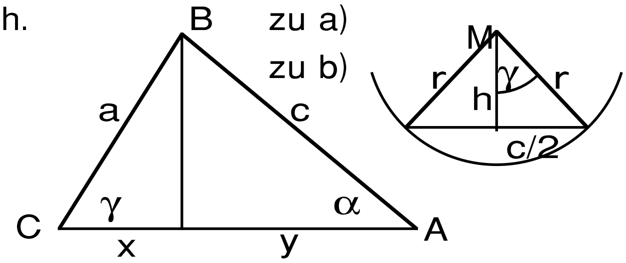
$Seg_1 = 101{,}96$; $Seg_2 = 42{,}86$ **F = 144,8**

46. α = halber Winkel an der Spitze des Bestimmungsdreiecks = 360°/34 = 10,59°

$F = 717 = 17 \cdot 0{,}5 \cdot h \cdot s$; $h = r \cdot \cos\alpha$; $s/2 = r \cdot \sin\alpha$ ==> $717 = r^2 \cdot 17 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$ ==> $r = 15{,}3$

==> $\mathbf{U = 34 \cdot r \cdot \sin\alpha\ \ = 95{,}5}$

47. a) $b = x + y$; $x = a \cdot \cos\gamma$; $y = c \cdot \cos\alpha$ ==> Beh.



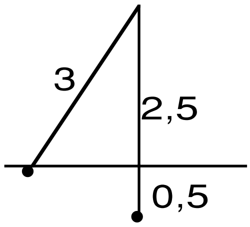
b) $c/2 = r \cdot \sin\gamma$; ebenso: $b = 2 \cdot r \cdot \sin\beta$;

$h_c = b \cdot \sin\alpha$;

==> $F = 0{,}5 \cdot c \cdot h_c = 2r^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$

48. a) $\cos\varphi = 2{,}5/3$; $\boldsymbol{\varphi = 33{,}56°}$

b) $b = \varphi \cdot 2 \cdot \pi \cdot r/360 =$ **1,757m**



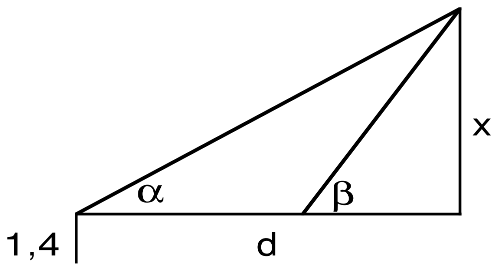
49. $x/(d-5) = t\beta$

$x/d = t\alpha$; => $d = x/t\alpha$

==> $t\beta = x/(x/t\alpha - 5)$

==> $x = 5 \cdot t\beta \cdot t\alpha/(t\beta - t\alpha) = 0{,}7434$m

==> **h = 2,143m**



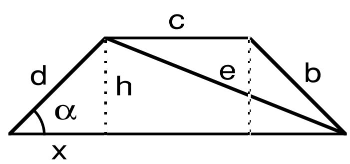
50. $h_c = b \cdot \sin\alpha$; $\mathbf{F} = h_c \cdot c/2\ \ = \mathbf{0.5 \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha}$

51. $h = d \cdot \sin\alpha = 4.41$ cm

$x = d \cdot \cos\alpha = 2.35$ cm

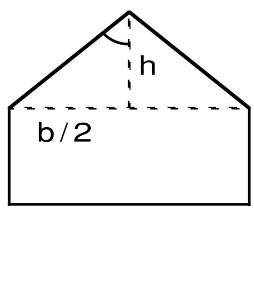
$a = 2x + c =$ **9.69 cm**

Pythagoras: $e = f =$ **8.57 cm**



52. $^1/_2 b : h = \tan \alpha/2$ —> $h = 4.20$ m

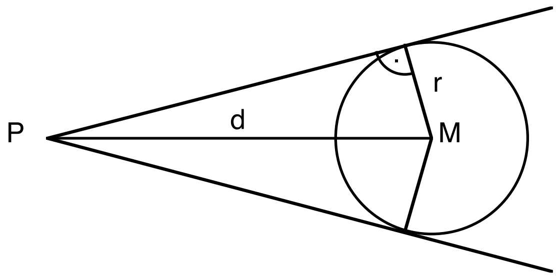
$F = ab + {}^1/_2 bh =$ $\mathbf{60.98\ m^2}$



53. $F = ab \cdot \sin\alpha$

54. $r/d = \sin \alpha/2$

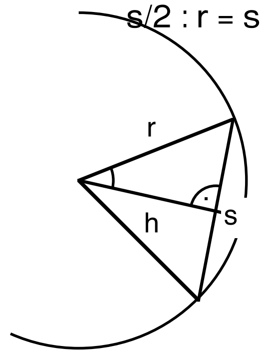
$\alpha = 2 \cdot \arcsin r/d$
$= \mathbf{50.75°}$



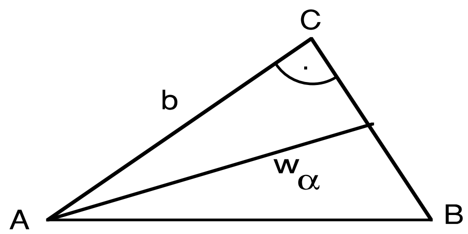
55. a) $s = 2r \sin \alpha/2 =$ **3.58 cm**

$s/2 : r = \sin \alpha/2$

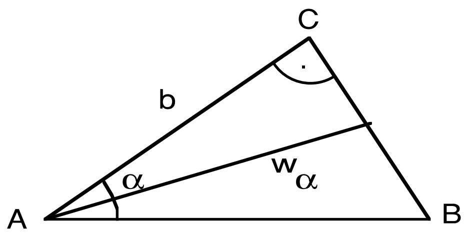
b) $h = r \cos \alpha/2 = 4.67\,cm$
$F_1 = {}^1/_2 hs = 8.36\,cm^2$
$FS = \pi r^2 \cdot \alpha/360 = 9.16\,cm^2$
$x = (FS - F_1)/FS \cdot 100\% =$ **8.72 %**



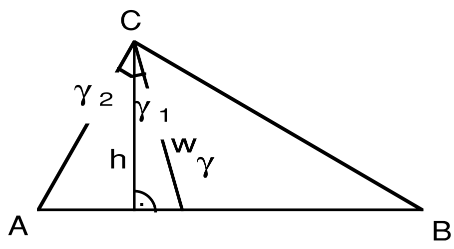
56. $\alpha = 2 \cdot \arccos(b/w\alpha) = 54.53°$
$c = b / \cos\alpha =$ **6.894 cm**



57. $b = w_\alpha \cdot \cos \alpha/2 = 2.73\,cm$
$a = b \cdot \tan \alpha =$ **5.14 cm**



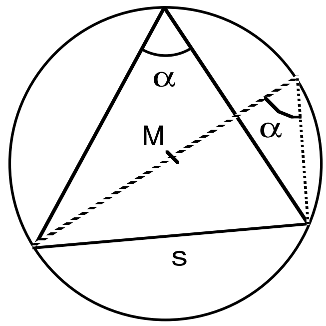
58. $\gamma_1 = \arccos(h/w_\gamma) = 27.266°$
$\gamma_2 = 45° - \gamma_1 = 17.73°$
$\alpha\ (\beta) = 90° - \gamma_2 = 72.27°$ (Δ an h spiegeln!)
$b\ (a) = h / \cos\gamma_2 =$ **4.200 cm**
$a\ (b) = b \cdot \tan\alpha =$ **13.13 cm**
$c = b / \cos\alpha =$ **13.79 cm**



59. neuen Peripheriewinkel mit Schenkel durch M wählen:

$s : 2r = \sin\alpha$

$r = s / 2\sin\alpha =$ **2.92 cm**



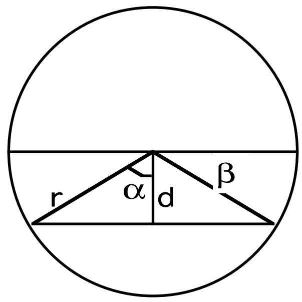
60. $\alpha = \arccos d/r = 73.40°$

$\beta = 90° - \alpha = 16.60°$

Sektor: $F_1 = \pi r^2 \cdot \beta/360° = 7.10\,cm^2$

Dreieck: $F_2 = {}^1/_2 rd\sin\alpha = 6.71\,cm^2$

$F = 2\cdot(F_1 + F_2) =$ **27.61 cm²**

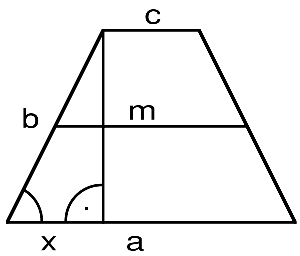


61. $x = h / \tan\alpha = 4.557\,cm$

$b = h / \sin\alpha =$ **10.99 cm**

$c = m - x =$ **45.44 cm**

$a = m + x =$ **54.56 cm**



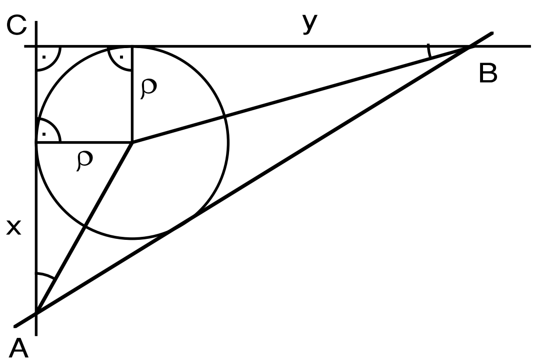
62. $U = 2nr \cdot \sin(180°/n)$

63. $x = \rho / \tan(\alpha/2) = 10.84\,cm$

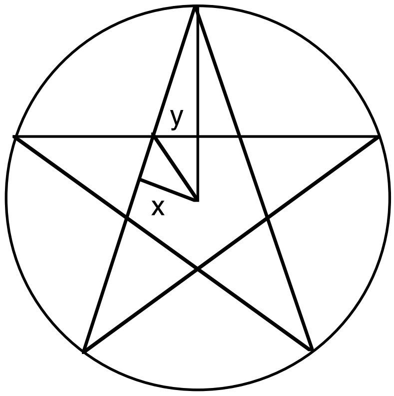
$y = \rho / \tan(\beta/2) = 6.70\,cm$

$b = x + \rho =$ **14.30 cm**

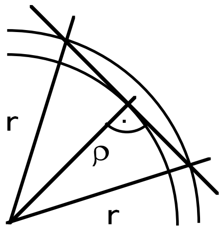
$a = y + \rho =$ **10.16 cm**



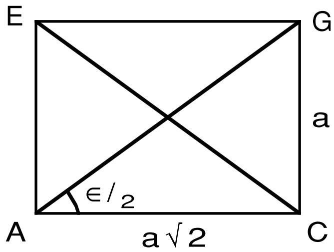
64. halbierter Aussenwinkel: 18°
halbierter Innenwinkel: 36°
$x = r \cdot \sin 18° = 2.16\,cm$
$y = x \cdot \tan 36° = 1.57\,cm$
$F = 5ry =$ **$55.01\ cm^2$**



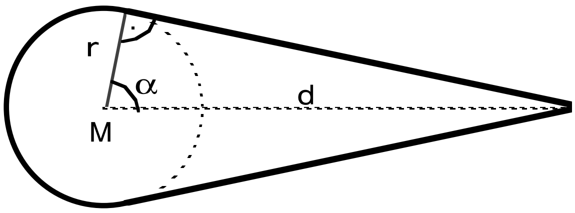
65. $\rho = r \cdot \cos(360°/10) =$ **$6.07\,cm$**



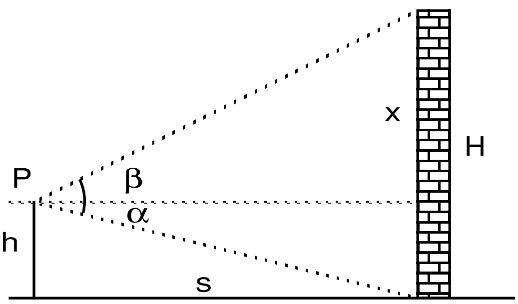
66. Querschnitt:
$\epsilon = 2 \cdot \arctan(a/a\sqrt{2})$
$= 2 \cdot \arctan(1/\sqrt{2}) =$ **$70.53°$**



67. $\alpha = \arccos(r/d) = 65.10°$
$\beta = 360° - 2\alpha = 229.80°$
Sektor: $F_1 = \pi r^2 \cdot \beta / 360° = 32.09\,cm^2$
Dreieck: $F_2 = {}^1/_2 r d \sin\alpha = 17.23\,cm^2$
$F = F_1 + 2F_2 =$ **$66.55\,cm^2$**



68. $s = h / \tan\alpha = 130.79\,m$
$x = s \cdot \tan\beta = 32.487\,m$
$H = x + h =$ **$46.49\ m$**



69. Winkel bei B: 90°

Winkel bei A: BG:AG = $\sqrt{2}:\sqrt{3} = \sin\gamma \longrightarrow \gamma =$ **54.74°**

Winkel bei G: $\epsilon = 90° - \gamma =$ **35.26°**

Flächeinhalt: $F = \frac{a^2}{2}\sqrt{2}$

70. a) $\tan\alpha = 16/20 \Longrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha = 38{,}7°}$

b) $\tan\beta = 16/\sqrt{20^2 + 4^2} \Longrightarrow$ $\boldsymbol{\beta = 38{,}1°}$

c) $\tan(\gamma/2) = 4/8 \Longrightarrow$ $\boldsymbol{\gamma = 53{,}1°}$

71. $V = \pi r^2 h/3 =$ **$20{,}94m^3$**; $s = \sqrt{(r^2+h^2)} = \sqrt{29m^2} \Longrightarrow M = \pi rs =$ **$33{,}84m^2$**;

$O = M + \pi r^2 = M + 12{,}57m^2 =$ **$46{,}40m^2$**; $\tan\alpha/2 = 2/5 \Longrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha = 43{,}60°}$**.**

72. $h = a\cdot\tan\alpha/\sqrt{2} =$ **36.91cm**; **$V = 5581cm^3$**;

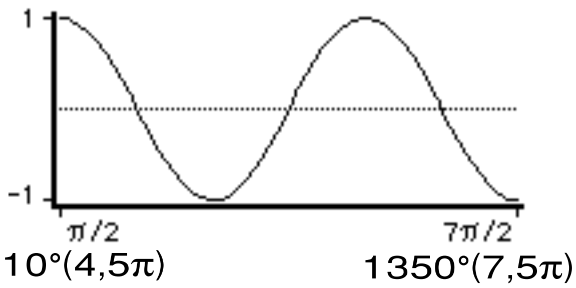
$h'^2 = h^2 + (a/2)^2 = 38.413$; $\tan(\beta/2) = a/2h' \Longrightarrow$ $\boldsymbol{\beta = 30.99}°$

oder: $s = a/(\sqrt{2})\cos\alpha) = 39.861 \Rightarrow \sin(\beta/2) = \cos\alpha/\sqrt{2}$ .....

73.

Achsen: x = 810°, 990°, 1170°, 1350°

Zentren: P(900°, 1080°, 1260° | 0)



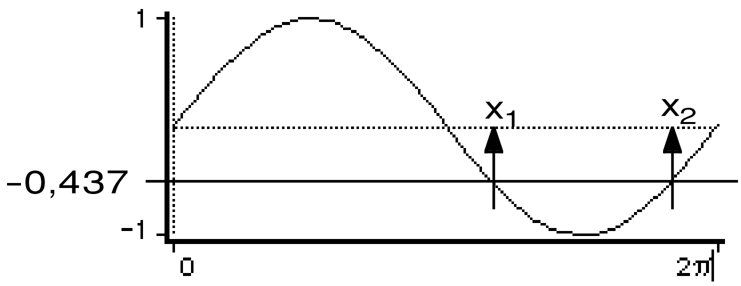
74. a) $\varphi = 206.7° + k\cdot 360°$ oder $\varphi = 333.3° + k\cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$

b) $116{,}6° \leqslant \varphi \leqslant 163{,}3°$ oder $296{,}6° \leqslant \varphi \leqslant 343.3°$

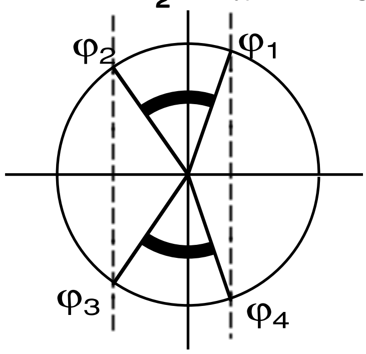
75. a) x = -0.473

$\Longrightarrow$ $\boldsymbol{x_1 = \pi + x = 3{,}62}$

$\boldsymbol{x_2 = 2\pi + x = 5{,}81}$



b)



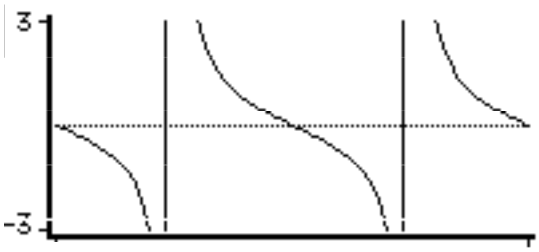
$\varphi_1 = 76{,}5°$; $\varphi_2 = 124{,}5°$

$\varphi_3 = 235{,}5°$; $\varphi_4 = 283{,}5°$

$\boldsymbol{\mathbb{L} = \{\varphi | 76{,}5° \leqslant \varphi \leqslant 124{,}5°}$

oder $\boldsymbol{235{,}5° \leqslant \varphi \leqslant 283{,}5\}}$

76.



77. a) **203,6°; 336,4°**
b) **1.249 , 4.351** (71,6°; 251,6°)
c) **$0° \leqslant \varphi \leqslant 78{,}5°$ oder $101{,}5° \leqslant \varphi \leqslant 258{,}5°$ oder $281{,}5° \leqslant \varphi \leqslant 360°$**
d) **$0.1974 < \varphi < 1.039$ oder $3.339 < \varphi < 4.181$**
($11{,}3° < \varphi < 59{,}5°$ oder $191{,}3° < \varphi < 239{,}5°$)

78. **$x = 2{,}356 + k \cdot \pi$**

79. a) **27,1° ; 152,9°** b) **115,6° ; 244,4°**
c) **80,0° ; 260,0°** d) **119,6° ; 299,6°**
e) **$0° \leqslant \varphi \leqslant 23{,}6°$ oder $156{,}4° \leqslant \varphi \leqslant 197{,}6°$ oder $342{,}6° \leqslant \varphi \leqslant 360°$**

80. a) $-11550° = -33 \cdot 360° + 321°$ ==> **$\varphi = 219°$**
b) $9937° = 55 \cdot 180° + 37°$ ==> **$\varphi = 37°$**

81. **$\cos(-\varphi) = \cos(360° - \varphi) = \cos\varphi$**
$\tan(-\varphi) = \tan(360° - \varphi) = -\tan\varphi$;
$\cot(-\varphi) = \cot(360° - \varphi) = -\cot\varphi$

82. φ von pos x-Achse aus in O abtragen. Gerade, bestimmt durch den freien Schenkel von φ, mit Tangente an EK in A(1|0) schneiden --> R = R(1| **tan φ**)

83. **$0° \leqslant \varphi \leqslant 23{,}6°$ oder $156{,}4 \leqslant \varphi < 197{,}5°$ oder $342{,}5° < \varphi \leqslant 360°$**

84. **39,2°; 320,7°; 140,8°; 219,2°**

85.

$\sin\alpha =$	0.98	$\alpha_1 =$	78.52	$\alpha_2 =$	101.48
$\cos\alpha =$	-0.37	$\alpha_1 =$	111.72	$\alpha_2 =$	248.28
$\tan\alpha =$	-0.38	$\alpha_1 =$	159.19	$\alpha_2 =$	339.19
$\sin\alpha =$	-0.72	$\alpha_1 =$	226.05	$\alpha_2 =$	313.95
$\cos\alpha =$	0.44	$\alpha_1 =$	63.90	$\alpha_2 =$	296.10
$\cot\alpha =$	0.10	$\alpha_1 =$	84.29	$\alpha_2 =$	264.29

86.

$\sin\alpha =$	0.14	$\alpha_1 =$	8.05	$\alpha_2 =$	171.95
$\cos\alpha =$	-0.02	$\alpha_1 =$	91.15	$\alpha_2 =$	268.85
$\tan\alpha =$	-0.68	$\alpha_1 =$	145.78	$\alpha_2 =$	325.78
$\sin\alpha =$	-0.37	$\alpha_1 =$	201.72	$\alpha_2 =$	338.28
$\cos\alpha =$	0.40	$\alpha_1 =$	66.42	$\alpha_2 =$	293.58
$\cot\alpha =$	0.60	$\alpha_1 =$	59.04	$\alpha_2 =$	239.04

87. a) $-100'000 = -(15'915 \cdot 2\pi - 3.1773)$ ==> $\mathbf{x = 3.1773}$
b) $360'000 = 114591 \cdot \pi + 1.7562$ ==> $\mathbf{x = 1.7562}$

88. $x = 0.685; 2.457; 3.826; 5.598$

89. a) $\sin x = -0.5678$
b) $\tan^2\alpha = 5.1$ ($\alpha \in [0°, 360°]$)

90. a) $\mathbf{a} = \sqrt{(b^2+c^2-2bc\cos\alpha)} = \mathbf{53{,}8}$;
$\sin\beta = b\cdot\sin\alpha/a$ --> $\boldsymbol{\beta} \mathbf{= 33{,}4°}$; $\sin\gamma = c\cdot\sin\alpha/a$ ---> $\boldsymbol{\gamma} \mathbf{= 42{,}6°}$
b) (sSw)! $\sin\beta = b\cdot\sin\alpha/a$--> $\boldsymbol{\beta_1} \mathbf{= 73{,}1°}$; $\boldsymbol{\gamma_1} \mathbf{= 70{,}4°}$;
$c = a\cdot\sin\gamma/\sin\alpha$ --> $\mathbf{c_1 = 72{,}8}$, $\boldsymbol{\beta_2} \mathbf{= 106{,}9°}$; $\boldsymbol{\gamma_2} \mathbf{= 36{,}6°}$; $\mathbf{c_2 = 46{,}1}$

91. $\mathbf{e} = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta)} = \mathbf{74{,}90}$;
$\sin\delta_1 = a\cdot\sin\alpha/f$ (Ssw) --> $\delta_1 = 33{,}06$ --> $\beta_1 = 35{,}84$; $\mathbf{d} = f\cdot\sin\beta_1/\sin\alpha = \mathbf{39{,}99}$

92. $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\beta = a^2 + b^2 + 2ab\cdot\cos\alpha$
$f^2 =$ ....$a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\alpha$ ==> $\mathbf{e^2 + f^2 = 2\cdot(a^2 + b^2)}$

93. a) $\mathbf{a} = \sqrt{(b^2+c^2-2bc\cos\alpha)} = \mathbf{53{,}8}$;
$\sin\beta = b\cdot\sin\alpha/a$ --> $\boldsymbol{\beta} \mathbf{= 33{,}4°}$; $\sin\gamma = c\cdot\sin\alpha/a$ ---> $\boldsymbol{\gamma} \mathbf{= 42{,}6°}$
b) (sSw)! $\sin\beta = b\cdot\sin\alpha/a$--> $\boldsymbol{\beta_1} \mathbf{= 73{,}1°}$; $\boldsymbol{\gamma_1} \mathbf{= 70{,}4°}$; $c = a\cdot\sin\gamma/\sin\alpha$
--> $\mathbf{c_1 = 72{,}8}$
$\boldsymbol{\beta_2} \mathbf{= 106{,}9°}$; $\boldsymbol{\gamma_2} \mathbf{= 36{,}6°}$; $\mathbf{c_2 = 46{,}1}$

94. a)

a) (sSw)! $\sin\gamma = c\cdot\sin\beta/b$--> $\boldsymbol{\alpha_1 = 73{,}1°}$; $\boldsymbol{\beta_1 = 70{,}4°}$; $\mathbf{b} = a\cdot\sin\beta/\sin\gamma$

--> $\mathbf{b_1 = 3{,}64}$

$\boldsymbol{\alpha_2 = 106{,}9°}$; $\boldsymbol{\beta_2 = 36{,}6°}$; $\mathbf{b_2 = 2{,}31}$

b) $b = \sqrt{(a^2+c^2-2ac\cdot\cos\beta)} = 214{,}3$ $\sin\gamma = c\cdot\sin\beta/b$ --> $\boldsymbol{\gamma = 33{,}2°}$;

$\sin\alpha = a\cdot\sin\beta/b$ ---> $\boldsymbol{\beta = 42{,}8°}$

95. a) $\cos\beta = -0{,}7357$ => $\boldsymbol{\beta = 137{,}4°}$; $\boldsymbol{\alpha = 10{,}84°}$; $\boldsymbol{\gamma = 31{,}79°}$

b) $\mathbf{c} = b\cdot\sin\gamma/\sin\beta = \mathbf{1{,}510}$; $\boldsymbol{\alpha = 45°}$; $\mathbf{a} = b\cdot\sin\alpha/\sin\beta = \mathbf{3{,}121}$

c) $\sin\alpha = 0{,}7803$ ==> $\boldsymbol{\alpha_1 = 51{,}29°}$;$\boldsymbol{\gamma_1 = 92{,}71°}$; $\mathbf{c_1 = 98{,}57}$

$\boldsymbol{\alpha_2 = 128{,}7°}$; $\boldsymbol{\gamma_2 = 15{,}3°}$; $\mathbf{c_2 = 26{,}0}$

d) $\mathbf{c = 55{,}4}$; $\boldsymbol{\alpha = 65{,}5°}$; $\boldsymbol{\beta = 72{,}0°}$

96. a) $\cos\beta = -0{,}7357$ => $\boldsymbol{\beta = 137{,}4°}$; $\boldsymbol{\alpha = 10{,}8°}$; $\boldsymbol{\gamma = 31{,}8°}$

b) $\mathbf{c} = b\cdot\sin\gamma/\sin\beta = \mathbf{1{,}51}$; $\boldsymbol{\alpha = 45°}$; $\mathbf{a} = b\cdot\sin\alpha/\sin\beta = \mathbf{3{,}12}$

c) $\sin\alpha = 0{,}7803$ ==> $\boldsymbol{\alpha_1 = 51{,}3°}$;$\boldsymbol{\gamma_1 = 92{,}7°}$; $\mathbf{c_1 = 98{,}6}$

$\boldsymbol{\alpha_2 = 128{,}7°}$; $\boldsymbol{\gamma_2 = 15{,}3°}$; $\mathbf{c_2 = 26{,}0}$

97. $\alpha = 52.91°$, kleinster Winkel: $\boldsymbol{\beta = 44.18°}$, $\gamma = 82.91°$ (SSS)

98. (WSW) $b = 2.80\,\text{cm}$, $c = 4.34\,\text{cm}$, $\alpha = 76.90°$

99. $\gamma = 35.1°$, Lösung: **PQ = 149.07 m** (WSW)

100. (SsW) $\gamma = 34.70°$, $\beta = 180°-\alpha-\gamma = 81.30°$, **b = 3.30 cm**

101. SsW: $a = 12.89\,\text{cm}$, $\alpha = 44.85°$, $\gamma = 55.15°$

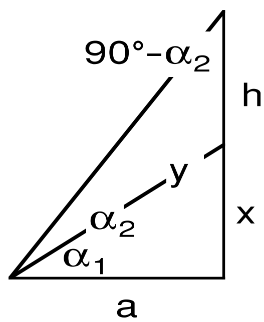
102. SWS: $c = 10.82\,\text{cm}$, $\alpha = 73.90°$, $\beta = 46.10°$

103. (sSw)! $\sin\beta = b\cdot\sin\alpha/a$--> $\boldsymbol{\beta_1 = 73{,}1°}$; $\boldsymbol{\gamma_1 = 70{,}4°}$; $c = a\cdot\sin\gamma/\sin\alpha$

--> $\mathbf{c_1 = 72{,}8}$

$\boldsymbol{\beta_2 = 106{,}9°}$; $\boldsymbol{\gamma_2 = 36{,}6°}$; $\mathbf{c_2 = 46{,}1}$

104.



$\tan\alpha_1 = x/a$ und $\tan\alpha_2 = (x+h)/a$

==> $\mathbf{x = h\cdot\tan\alpha_1/(\tan\alpha_2-\tan\alpha_1) = 44{,}1}$

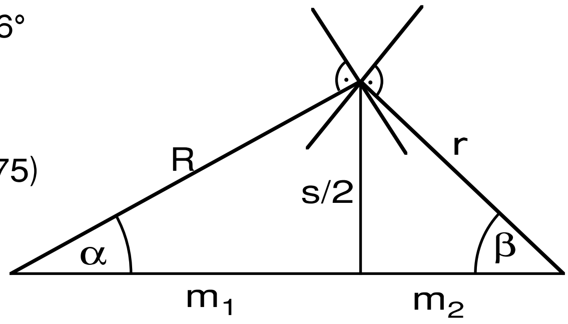
oder: $\text{Sin}(\alpha_2-\alpha_1) : h = \sin(90° - \alpha_2) : y$

==> $y = h\cdot\sin(90° - \alpha_2)/\sin(\alpha_2 - \alpha_1)$ (= 47,24)

$\sin\alpha_1 = x(y$ ==> $\mathbf{x = h\cdot\cos\alpha_2\cdot\sin\alpha_1/\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}$

105. c) den Schnitt-winkel δ der Kreise (d.h. den Winkel zwischen den Tangenten in einem der Schnittpunkte)

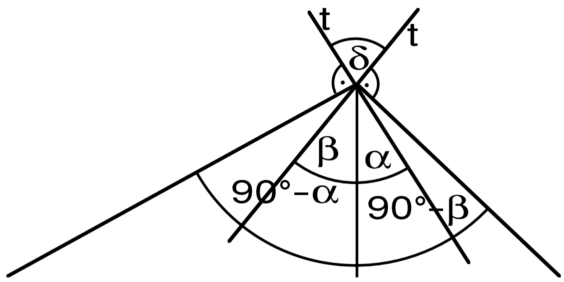
a) $\cos\alpha = (R^2 + m^2 - r^2)/2Rm \longrightarrow \alpha = 28{,}96°$
$\sin\alpha = (s/2)/R \longrightarrow$ $\mathbf{s} = 2R\cdot\sin\alpha = \mathbf{5{,}81}$



($s/2 = 2{,}9047$; $m_1 = R\cdot\cos\alpha = 5{,}25$; $m_2 = 2.75$)

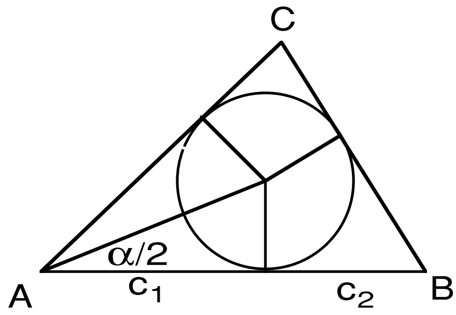
b) $F_1 = R^2\cdot\pi\cdot 2\alpha/360° - m_1\cdot s/2 = 2{,}943$

$\cos\beta = (r^2 + m^2 - R^2)/2rm$
$\longrightarrow \beta = 46{,}567$
$F_2 = r^2\cdot\pi\cdot 2\beta/360 - m_2\cdot s/2 = 5{,}016$
$\Longrightarrow$ $\mathbf{F = F_1 + F_2 = 7,\ 96}$



c)
$\boldsymbol{\delta = \alpha + \beta = 75{,}7°}$

106. a) (sSw) $\sin\gamma = c\cdot\sin\alpha/a \Longrightarrow$ $\boldsymbol{\gamma_1 = 51{,}4°; \gamma_2 = 128°;}$
$\boldsymbol{\beta_1 = 92{,}7°; \beta_2 = 15{,}5°;}$
$b = a\cdot\sin\beta/\sin\alpha$; $\mathbf{b_1 = 19{,}4; b_2 = 5{,}20}$

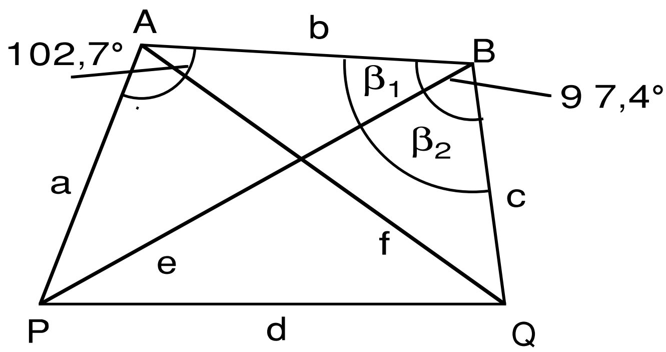


b) (sws) $\mathbf{c} = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma} = \mathbf{124}$;
$\sin\alpha = a\cdot\sin\gamma/c \Longrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha = 19.83°; \beta = 5.17°}$

c) $c_1 = \rho/\tan(\alpha/2) = 35{,}3 \Longrightarrow c_2 = 55{,}5$
$\Longrightarrow \tan(\beta/2) = \rho/c_2 \Longrightarrow$ $\boldsymbol{\beta = 43{,}6°; \Longrightarrow \gamma = 72{,}0°}$
$\mathbf{b} = c\cdot\sin\beta/\sin\gamma = \mathbf{65{,}8}$; $\mathbf{a} = c\cdot\sin\alpha/\sin\gamma = \mathbf{86{,}1}$

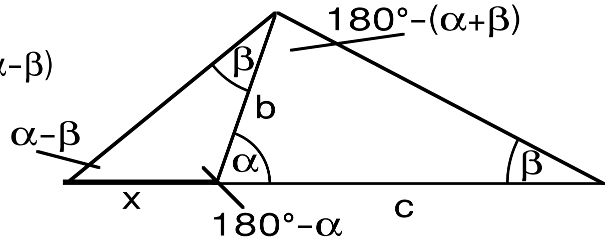
107. $\alpha_1 = \sphericalangle(FF_1)$: $\cos\alpha_1 = (F_1{}^2 + F^2 - F_2{}^2)/2F_1F$; --> $\boldsymbol{\alpha_1 = 62{,}0°}$;
$\cos\alpha_2 = (F_2{}^2 + F^2 - F_1{}^2)/2F_2F$; --> $\boldsymbol{\alpha_2 = 17{,}5°}$

108. $e = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos 102{,}7°}$
$= 495{,}7$
$\sin\beta_1 = a\cdot\sin 102{,}7°/e$
$\Longrightarrow \beta_1 = 42{,}9°$
$\Longrightarrow \beta_2 = 54{,}5°$
($f = 415{,}1$; $\alpha_1 = 39{,}3°$; $\alpha_2 = 63{,}4°$)
$\mathbf{\overline{PQ} = d} = \sqrt{e^2+c^2-2ec\cdot\cos\beta_2}$
$= \mathbf{404{,}4\ (m)}$



109. $\overline{SX} = 5t;\ \overline{SY} = 6t;$ ==> $7^2 = (5t)^2 + (6t)^2 - 2\cdot5t\cdot6t\cdot\cos60°$
==> $49 = 61t^2 - 30x^2$ ==> $x = 7/\sqrt{31} = 1{,}257;$ ==> $\mathbf{\overline{SX} = 6{,}29;\ \overline{SY} = 7{,}54}$

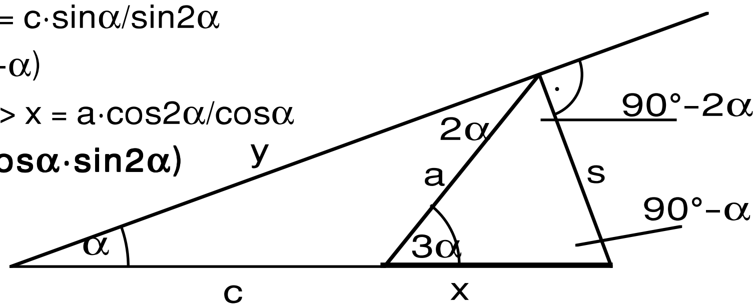
110. a) $c : \sin\gamma = b : \sin\beta;$
$b = c\cdot\sin\beta/\sin\gamma = c\cdot\sin\beta/\sin(\alpha+\beta)$
$x : \sin\beta = b : \sin(\alpha-\beta)$ ==> $x = b\cdot\sin\beta/\sin(\alpha-\beta)$
==> $\mathbf{x = c\cdot\sin^2\beta/(\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta))}$



b) $\mathbf{x = 43{,}81}$

c) $\beta = \alpha-\beta = 30°$ ==> $\mathbf{x = b = c/2}$

111. a) $c : \sin2\alpha = a : \sin\alpha$ ==> $a = c\cdot\sin\alpha/\sin2\alpha$
$x : \sin(90°-2\alpha) = a : \sin(90°-\alpha)$
<==> $x : \cos2\alpha = a : \cos\alpha$ ==> $x = a\cdot\cos2\alpha/\cos\alpha$
==> $\mathbf{x = c\cdot\sin\alpha\cdot\cos2\alpha/(\cos\alpha\cdot\sin2\alpha)}$
$\mathbf{= c\cdot\tan\alpha/\tan2\alpha}$

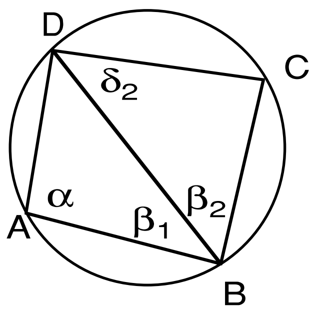


oder:
$\mathbf{x = c\cdot\sin(3\alpha)/(\sin(2\alpha)\cdot\cos\alpha) - c}$

b) $\mathbf{x = 2{,}16}$
c) $c = y\cdot\sqrt{3}/2;\ y = 2c/\sqrt{3};\ a = y/2 = c/\sqrt{3}$
$= s\sqrt{3}/2 = 2x\sqrt{3}/2$ ==> $c/\sqrt{3} = x\sqrt{3}$ ==> $\mathbf{x = c/3}$

112. $x = a - c = 442;\ \cos\alpha = (x^2 + d^2 - b^2)/2xd$ ==> $\mathbf{\alpha = 72{,}8°}$;
$\cos\beta = (b^2 + x^2 - d^2)/2bx$ ==> $\mathbf{\beta = 54{,}6°}$
==> $\boldsymbol{\gamma} =$;$180° - \beta = \mathbf{125{,}4°}$; $\boldsymbol{\delta} = 180°-\alpha = \mathbf{107{,}2°}$;
$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\beta$ ==> $\mathbf{e = 618}$; ;
$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cdot\cos\alpha$ ==> $\mathbf{f = 752}$
$h = d\cdot\sin\alpha = b\cdot\sin\beta$ ==> $\mathbf{F} = 0.5\cdot(a + c)\cdot d\cdot\sin\alpha\ \mathbf{= 229'000}$

113. $f = 5{,}537$ (Cos.satz)
$\sin\delta_2 = b\cdot\sin\gamma/f$ ==> $\delta_2 = 34{,}69°$
$\beta_2 = 45{,}31°$
$c = f\cdot\sin\beta_2/\sin\gamma = 3{,}997$
$\sin\beta_1 = d\cdot\sin\alpha/f$ ==> $\beta_1 = 37{,}21°$ ==> $\beta = 82{,}52°$



$\mathbf{f = 5{,}54;\ c = 4{,}00;\ \beta = 82{,}5°}$

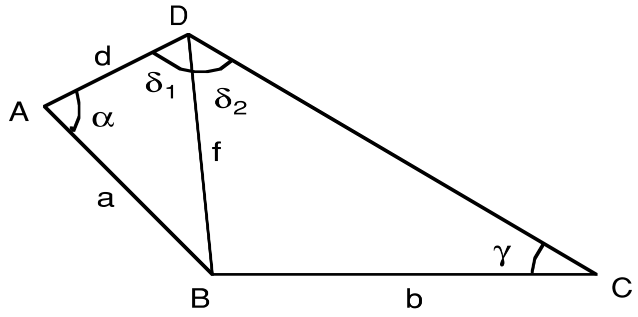
114. $\gamma = 47°;\ \overline{BK} = \overline{AB}\cdot\sin\alpha/\sin47° = 4{,}623;\ \overline{KL} = \overline{BK}\cdot\sin\delta/\sin\varphi = \mathbf{3{,}96km}$

115. $\cos\alpha = (b^2 + c^2 - a^2)/2bc = -0.4583 \Longrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha = 117{,}3°}$
$\sin\beta = b\cdot\sin\alpha/a = 0{,}4444 \Longrightarrow$ $\boldsymbol{\beta = 26{,}4°;\ \gamma = 36{,}3°}$
$\sin\gamma = h_b/a$; $h_b = a\cdot\sin\gamma =$ **3,56**

116. (SSS) $\alpha' = 20{,}74°$, $\beta = 127.17°$, $\gamma' = 32.09°$
$\alpha = \alpha' + \gamma' = 180° - \beta =$ **52.83°**

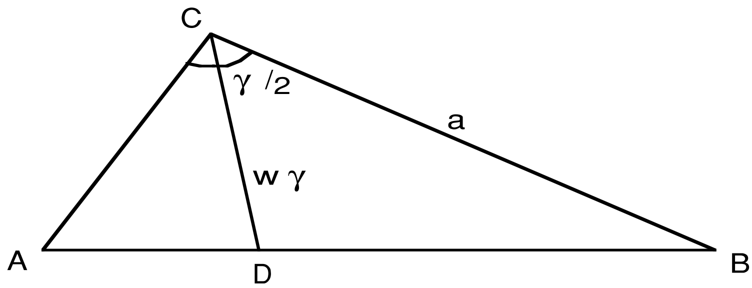
117. Dreieck ABD: (SWS)
$f = 6.36\,\text{cm}$, $\delta_1 = 28.81°$
$\delta_2 = \delta - \delta_1 = 51.19°$

Dreieck BCD: (WSW)
b = 7.71 cm

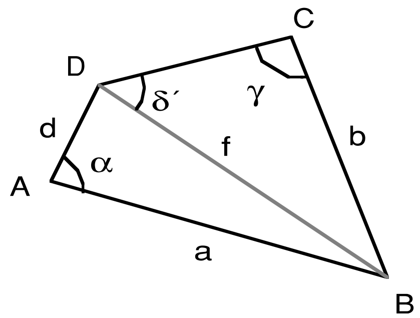


118. Dreieck BCD: (SWS)
$BD = 7.59\,\text{cm}$, $\beta = 21.92°$

Dreieck ABC: (WSW)
b = 7.05 cm

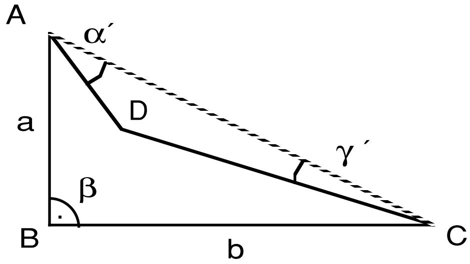


119. Dreieck ABD: (SWS) $f = 7.94\,\text{cm}$
Dreieck BCD: (SsW) $\delta' = 12.63°$
c = 9.10 cm

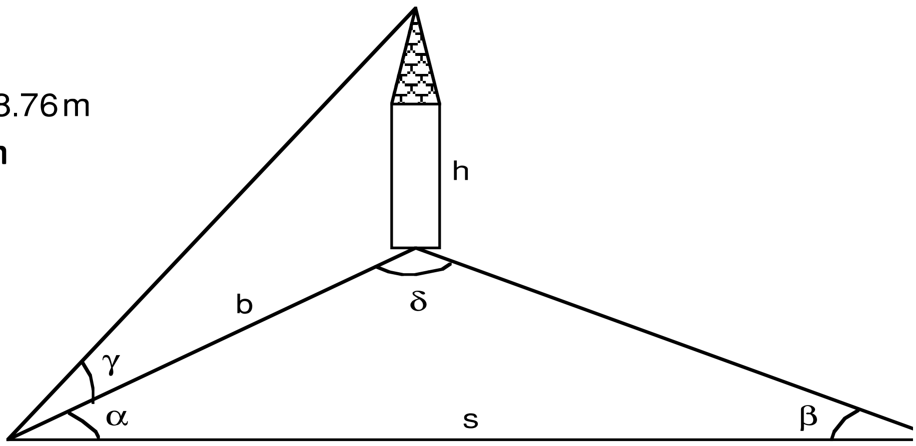


120. Dreieck ABC: (rechtwinklig)
$AC = 7.81\,\text{cm}$
$\alpha' = 50.19°$, $\gamma' = 39.81°$

Dreieck ADC: (WSW)
c = 5.69 cm , d = 2.73 cm

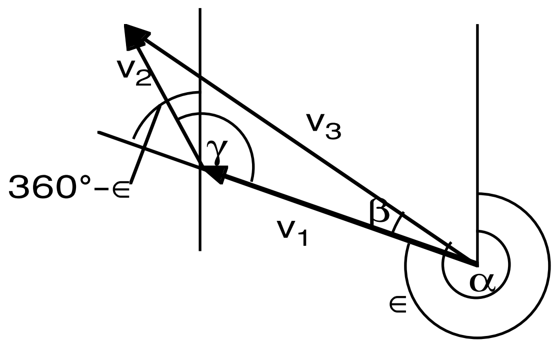


121. $\delta = 180° - \alpha - \beta = 75°$
(WSW)
$b = s \cdot \sin\beta / \sin\delta = 118.76\,m$
$h = b \cdot \tan\gamma =$ **25.24 m**



122. $EG = 6\sqrt{2}\,cm = 8.49\,cm$; $GM = \sqrt{45}\,cm = 3\sqrt{5}\,cm = 6.71\,cm$; $EM = 9\,cm$;
Cosinussatz:
Winkel bei E: $\epsilon =$ **45°** ; Winkel bei G: $\gamma =$ **71.57°** ; Winkel bei M: $\mu =$ **63.43°**
Flächeninhalt: $F = {}^1/_2 EM \cdot EG \cdot \sin\epsilon =$ **27 cm²**

123. v_3 = Geschw. über Grund
= 30km/8Min = 225km/h;



$v_2^2 = v_1^2 + v_3^2 - 2v_1v_3 \cdot \cos(\alpha - \epsilon)$
==> **v_2 = 50,9km/h**;

$\cos\gamma = (v_1^2 + v_3^2 - v_2^2)/2v_1v_3$
——> $\gamma = 113°$
oder zuerst $\sin\delta = v_1 * \sin\beta / v_2 \Rightarrow \delta = 54.78° \Rightarrow \gamma = 180° - \beta - \delta$
φ = $360° - (360° - \epsilon + \gamma - 180°) = \epsilon + 180° - \gamma =$ **342°**

124. a) $\tan x = 1/6$; **$x_1 = 9{,}46°$; $x_2 = 189{,}46°$**

b) $t + 2t/(1-t^2) = 0$; $t - t^3 + 2t = 0$; $t(3 - t^2) = 0$; $t_1 = 0$; $t_{23} = \pm\sqrt{3}$
$x_1 = 0°$; $x_2 = 180°$; $x_3 = 360°$; $x_4 = 60°$; $x_5 = 240°$; $x_6 = 120°$; $x_7 = 300°$

c) $6c^2 - sc - s^2 = 0$; $(2c - s)(3c + s) = 0 \Rightarrow t = 2$ oder $t = -3$
$x_1 = 63{,}43°$; $x_2 = 243{,}43°$; $x_3 = 108{,}43°$; $x_4 = 288{,}43°$

d) $c \leqslant -\sqrt{0{,}7}$ oder $c \geqslant \sqrt{0{,}7}$;
$0 \leqslant x \leqslant 0.580$ oder $2.562 \leqslant x \leqslant 3.721°$ oder $5.703 \leqslant x \leqslant 2\pi$

e) $\sin(60° - \alpha) = \sin 60° \cdot \cos\alpha - \cos 60° \cdot \sin\alpha = \sqrt{3}/2 \cdot 4/5 - 1/2 \cdot (\pm\sqrt{1 - 0{,}64})$
$=$ **$2\sqrt{3}/5 \pm 3/10$**

125. $\alpha = 60°$; $4 = \sin\beta/\sin(120°-\beta)$; $4(\sin120°\cos\beta - \cos120°\sin\beta) = \sin\beta$
$\Rightarrow 2\sqrt{3}\cos\beta + 2\sin\beta = \sin\beta$ (*); $12 - 12s^2 = s^2$; $s_{12} = \pm\sqrt{12/13}$
$\Rightarrow \beta_1 = 73{,}9°$; $\beta_2 = 106{,}1°$; β_1 ergibt keine L. $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\beta = 106{,}1°}$; $\boldsymbol{\gamma = 13{,}9°}$
einfacher: (*) $\Rightarrow -2\sqrt{3}\cos\beta = \sin\beta \Rightarrow \tan\beta = -2\sqrt{3}$

126. $2c^2 - 7c + 3 = 0$; $c_{12} = 0{,}25(7\pm5)$; $c_1 = 3$; $c_2 = 1/2 \Rightarrow$ $\boldsymbol{x_1 = 60°}$; $\boldsymbol{x_2 = 300°}$

127. $c(s + 3c) = 0$; $c = 0$ oder $t = -3$; $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\mathbb{L} = \{90°, 270°, 108{,}4°, 288{,}4°\}}$

128. $4s = 1-6c$; $16(1-c^2) = 1 - 12c + 36c^2$; $40c^2 - 12c - 3 = 0$
$c_{12} = (12 \pm \sqrt{3246})/104$; $c_1 = 0{,}6647$; $c_2 = -0{,}4340$;
$\Rightarrow x_1, x_2, x_3, x_4$; Probe $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\mathbb{L} = \{115{,}7°, 311{,}7°\}}$

129. $s^4 + c^4 - 2/3 = 0$; $s^4 + (1-s^2)^2 - 2/3 = 0$; $6s^4 - 6s^2 + 1 = 0$;
$s^2_{12} = (6\pm\sqrt{12})/12$; $s_{12} = \pm0{,}888$; $s_{34} = \pm 0{,}4597$;
$\Rightarrow$ $\boldsymbol{\mathbb{L} = \{27{,}4°; 62{,}6°; 117{,}4°; 152{,}6°; 207{,}4°; 242{,}6°; 297{,}4°; 332{,}6°\}}$

130. $0 \leqslant 2x \leqslant 0{,}412$ oder $2{,}730 \leqslant 2x \leqslant 6{,}694$ oder $9{,}013 \leqslant 2x \leqslant 4\pi$
$\Rightarrow$ $\boldsymbol{0 \leqslant x \leqslant 0{,}206}$ **oder** $\boldsymbol{1{,}365 \leqslant x \leqslant 3{,}347}$ **oder** $\boldsymbol{4{,}507 \leqslant x \leqslant 2\pi}$

131. $\tan\alpha = 8/x$; $\tan(2\alpha) = 20/x$; $\tan(2\alpha) : \tan\alpha = = 2\tan\alpha/(1-\tan^2\alpha) = 5:2$;
$\Rightarrow 4 = 5-4\tan^2\alpha$; $t = +\sqrt{0{,}2}$; $\boldsymbol{\alpha = 24{,}1°}$

132. a) $2\cos^2x - 1 \leqslant 2\cos x$; $2c^2 - 2c - 1 \leqslant 0$; $c_{12} = 0{,}5(1\pm\sqrt{3})$; $\Rightarrow c_1 \leqslant c \leqslant 1 \leqslant c_2$;
$c_1 = 0{,}5(1-\sqrt{3}) \Rightarrow x_1 = 111{,}5°$; $x_2 = 248{,}5°$;
$\boldsymbol{\mathbb{L} = \{x | 0° \leqslant x \leqslant 111{,}5°}$ **oder** $\boldsymbol{248{,}5° \leqslant x \leqslant 360°\}}$
b) $\sin x + \sin y = 2\sin((x+y)/2)\cos((x-y)/2) = 2\sin45°\cos((x-y)/2) =$
$\sqrt{2}\cos((x-y)/2) = \sqrt{3/2} \Rightarrow (x-y)/2 = 30°$ oder $330°$; $(x+y)/2 = 45°$
$\Rightarrow$ $\boldsymbol{x_1 = 75°; y_1 = 15°;}$ $\boldsymbol{x_2 = 15°; y_2 = -285° \equiv 75°}$
oder $\sin x + \sin(90°-x) = \sqrt{3/2} = s + c$; etc

133. a) $s_1 = -0{,}5$; $s_2 = -1 \Rightarrow$ $\boldsymbol{\mathbb{L} = \{210°; 270°; 330°\}}$
b) $4s^2 + 2(1-s^2)-1=0$; $2s^2 + 1 = 0 \Rightarrow$ $\boldsymbol{\mathbb{L} = \emptyset}$
c) $|:c^2 \Rightarrow 6t^2 + t - 2 = 0$; $t_1 = 0{,}5$; $t_2 = -2/3$; $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\mathbb{L} = \{0{,}464; 2{,}55; 3{,}61; 5{,}70\}}$
oder: ... $= (2s - c)(3s + 2c) = 0$ etc.

134. a) 34.99°, 214.99° b) 120°, 240°

135. a) 153°, 333° b) 0°, 45°, 180°, 225°

136. a) 0°, 180° b) 270°

137. a) 26.57°, 153.43°, 206.57°, 333.43°
b) —> $\sin x \cdot (2\cos^2 x - 1) = 0$ —> 0°, 45°, 135°, 180°, 225°, 315°, 360°

138. a) 187.18°, 352.82°
b) 39.23°, 320.77°, 140.77°, 219.23°

139. a) 14.04°, 194.04°
b) 69.82°, 290.18°, 98.33°, 261.67°

140. $\mathrm{Cos}(45°+\alpha) + \cos(45°-\alpha) = \cos 45° \cdot \cos\alpha - \sin 45° \cdot \sin\alpha + \cos 45° \cdot \cos\alpha + \sin 45° \cdot \sin\alpha$
$= 2 \cdot \cos 45° \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \sqrt{2}/2 \cdot \cos\alpha = \sqrt{2} \cdot \cos\alpha$

141. $\cos(\alpha-\beta) = \sin(90°-(\alpha-\beta)) = \sin((90°-\alpha)+\beta) = \sin(90°-\alpha) \cdot \cos\beta + \cos(90°-\alpha) \cdot \sin\beta$
$= \boldsymbol{\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \ \sin\beta}$

142. a) **tan75°** $= \tan(45° + 30°) = (\tan 45° + \tan 30°)/(1 - \tan 45° \cdot \tan 30°)$
$= (1 + \sqrt{3}/3)/(1 - \sqrt{3}/3) = (3+\sqrt{3})/(3-\sqrt{3}) = \mathbf{2 + \sqrt{3}} = 3{,}732$
b) **sin15°** $= \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cdot \cos 30° - \cos 45° \cdot \sin 30°$
$= \sqrt{2}/2 \cdot \sqrt{3}/2 - \sqrt{2}/2 \cdot 0.5 = \mathbf{(\sqrt{6} - \sqrt{2}/4} = 0{,}2588$

c) $\cos 22{,}5° = +\sqrt{\dfrac{1+\cos 45°}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}/2}{2}} = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} = a$

$\cos 11{,}25° = +\sqrt{\dfrac{1+a}{2}} = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}} = 0.5 \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

143. $c/s - s/c = (c^2 - s^2)/sc = \cos(2\alpha)/0.5\sin(2\alpha) = 2/(\sin(2\alpha)/\cos(2\alpha)) = \mathbf{2/\tan(2\alpha)}$

144. a) $\cos 2\alpha = 2 \cdot \cos^2\alpha - 1$ (mit Add.theorem) ==> $\cos^2\alpha = (\cos 2\alpha + 1)/2$; $\alpha = x/2$ ==> Beh.
b) **<u>sin15°</u>** $= \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cdot \cos 30° - \cos 45° \cdot \sin 30°$
$= \sqrt{2}/2 \cdot \sqrt{3}/2 - \sqrt{2}/2 \cdot 0.5 = \underline{\mathbf{(\sqrt{6} - \sqrt{2}/4}} = 0{,}2588$
<u>tan75</u>° $= \tan(45° + 30°) = (\tan 45° + \tan 30°)/(1 - \tan 45° \cdot \tan 30°)$
$= (1 + \sqrt{3}/3)/(1 - \sqrt{3}/3) = (3+\sqrt{3})/(3-\sqrt{3}) = \underline{\mathbf{2 + \sqrt{3}}} = 3{,}732$

$\cos 15° = +\sqrt{\dfrac{1+\cos 30°}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{3}/2}{2}} = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}} = a$

$\mathbf{\cos 7{,}5°} \ \underline{=} +\sqrt{\dfrac{1+a}{2}} = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}} = \mathbf{0.5 \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$

145. a) $\cos\alpha$
b) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$

146. $\frac{1}{2}[(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)] = \frac{1}{2} \cdot 2\cos\alpha\cos\beta = \cos\alpha \cdot \cos\beta$

147. $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta = 2\sin\alpha\cos\beta$

148. $\cos60°\cos\alpha-\sin60°\sin\alpha + \cos60°\sin\alpha+\sin60°\sin\alpha$
$= 2\cos60°\cos\alpha = \mathbf{\cos\alpha}$

149. $\sin3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha)$
$= \sin2\alpha\cos\alpha + \cos2\alpha\sin\alpha$
$= (2\sin\alpha\cos\alpha)\cos\alpha + (1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha$
$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$
$= 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$
$= \mathbf{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}$