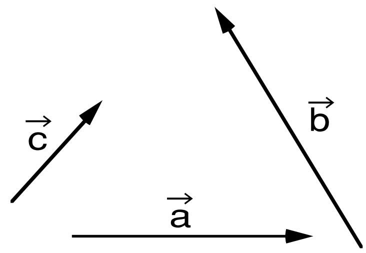
Vektorgeometrie

Einführung



1. Zeichne drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$(siehe Bild).

a) Konstruiere $\vec{v} = \vec{c} - 2\vec{b} - 0{,}5\vec{a}$.

b) Zerlege $\vec{a}$ nach $\vec{b}$ und $\vec{c}$ und schreibe die gefundene Zerlegung auf.

2. Geg: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ Ges: a) $\vec{b}$ mit entgegengesetzter Richtung und Länge 45

b) $\vec{v}$ mit gleicher Richtung und Länge 1

3. Geg: $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ y \\ 8 \end{pmatrix}$. Ges: x und y so, dass a) $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear,

b) $\vec{a} \perp \vec{b}$.

4. Geg: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$.

a) Berechne $\vec{v} = 3\vec{a} - 4\vec{b} + 2{,}5\vec{c}$.

b) Stelle $\vec{d}$ als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

5. Welcher Punkt auf der z-Achse ist von A(11|8|-9) dreimal so weit entfernt wie von B(6|-3|5) ?

6. Geg: A(16|-6), B(-1|11), C(-8|4). Bestimme durch Rechnung:

a) die Ecke D des Parallelogramms ABCD

b) den Schwerpunkt S des Dreiecks ABC

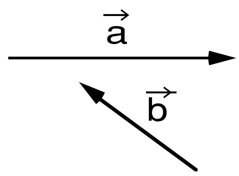
c) Den Umfang u des Dreiecks ABC

d) Mittelpunkt M und Radius r des Umkreises des Dreiecks ABC

e) $\gamma = \sphericalangle(ACB)$ sowie einen Vektor $\vec{w}$ mit der Richtung von w_γ

7. Im Würfel ABCDEFGH liegt P auf HB so, dass $\overline{HP} = 0.25 \cdot \overline{HB}$. Di e Gerade (GP) durchstösst die Ebene ADHE in Q. Zerlege $\overrightarrow{AQ}$ nach $\overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{AE}$.

8. Zeichne zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (siehe Bild).
Konstruiere:



a) $\vec{u} = \vec{a} + 1{,}5\vec{b}$ b) $\vec{v} = \vec{b} - 3\vec{a}$

c) $\vec{w}$ so, dass $3\vec{b} + 2\vec{w} = 2\vec{a}$.

9. Geg: A(-4|-6), B(0|-6), C(5|6).

Ges: a) Umfang u des Dreiecks ABC

b) ein Vektor $\vec{w}$ mit der Richtung von w_β

c) β

10. Geg: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{w} = \begin{pmatrix} -5 \\ -16 \\ 11 \end{pmatrix}$.

a) Berechne $\vec{u} = \vec{a} - 3\vec{b} + 0{,}5\vec{c}$.

b) $\vec{v}$ hat die doppelte Länge und die gleiche Richtung wie der Kehrvektor von $-\vec{c} + \vec{a}$. Bestimme $\vec{v}$.

c) Zerlege $\vec{w}$ nach $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

11. Die Punkte P und Q teilen die Strecke A(-9|15|-2) B(12|-6|4) in drei gleiche Teile. Bestimme P und Q.

12. Der Vektor $\vec{v}$ ist parallel zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 42 \\ -15 \\ 6 \end{pmatrix}$ und hat die Länge 50. Bestimme $\vec{v}$.

13. Bestimme k, wenn

a) die Vektoren $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ k \end{pmatrix}$ kollinear sind

b) die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} k \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ komplanar sind

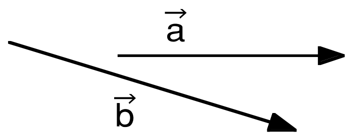
c) der Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ k \\ 4 \end{pmatrix}$ die Länge 5 hat.

14. Geg: A(-6|6|3), B(-3|7,5|1,5).
Ges: Punkte auf der y-Achse, die von A doppelt so weit entfernt sind wie von B.

15. Geg: Vektor $\vec{a}$ der Länge 3 und Vektor $\vec{b}$ der Länge 4 (ungefähr wie im Bild).
Konstruiere:

a) $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b}$ b) $\vec{v} = -0{,}5\vec{a} - 1{,}5\vec{b}$

c) $\vec{w}$ mit $3\vec{a} + 2\vec{w} = \vec{b}$.



16. Geg: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$: $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{w} = \begin{pmatrix} 13 \\ 17 \\ -16 \end{pmatrix}$.

a) Berechne $\vec{u} = 2\vec{a} + 4\vec{b} - 1.5\vec{c}$.

b) $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$. Gib den Kehrvektor $\vec{x}$ von $\vec{v}$ an.

c) Zerlege $\vec{w}$ nach $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

17. Bestimme den Durchstosspunkt S von g durch E :

g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; E: $3x - y + 4z - 15 = 0$

18. Bestimme alle Punkte, die von A(8|4) und B(16|24) dieselbe Entfernung haben und auf der x-Achse liegen

19. Geg: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ Ges: $\vec{b}$ mit entgegengesetzter Richtung und Länge 45

20. Geg: A(6 | 3 | 8), B(10 | 11 | 0), C(12 | 3 | 16).
Ges: a) Umfang u des Dreiecks ABC, b) der Winkel γ,
c) ein Vektor $\vec{w}$ in Richtung von w_β.

Geradengleichung

21. f: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; h: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$

a) Bestimme die gegenseitige Lage von f und g.

b) Bestimme die gegenseitige Lage von f und h.

c) g hat eine spezielle Lage im KS. Beschreibe sie.

22. f: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$; g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; h: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Bestimme die gegenseitige Lage von f und g.
b) Bestimme die gegenseitige Lage von f und h.
c) g hat eine spezielle Lage im KS. Beschreibe sie.
d) Spiegle f an Z(1|2|3) (Gib eine Gleichung von f′).
e) Gib die Spurpunkte von h an

23. Von der Geraden g sind die beiden Spurpunkte P(1|5|0) und Q(0|7|-3) bekannt. Bestimme:

a) eine Gleichung von g
b) den dritten Spurpunkt von g
c) alle Punkte S auf g, die von der xy-Ebene den Abstand 12 haben
d) alle Punkte T auf g, deren Entfernung von P $\sqrt{126}$ beträgt.

24. Bestimme im Dreieck A(-2|-3) B(10|3) C(-4|6)

a) eine Koordinatengleichung der Höhengeraden h_c samt Höhenfusspunkt H_c
b) die Winkel β und γ
c) eine Parametergleichung der Schwerelinie s_c und der Mittelsenkrechten m_c.

25. Gegeben: g: $6x + 5y - 10 = 0$.

a) Bestimme Steigung, Neigungswinkel φ, y-Achsenabschnitt und x-Achsenabschnitt von g. Zeichne die Gerade.
b) Liegt P(2,9|-1,5) auf g ? (Rechnung !)
c) h: $3x + 5y + 5 = 0$. Bestimme $\alpha = \sphericalangle(gh)$.

26. Bestimme die Koordinatengleichungen der Geraden, die mit g: $4x + 3y + 6 = 0$ einen 45°-Winkel einschliessen und durch P(4|5) gehen.

27.

Geg: g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 29 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$; h: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ges: Punkt G auf g und Punkt H auf h so, dass die Gerade (GH) parallel zur z-Achse ist.

28. Geg: g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; h: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ges: a) gegenseitige Lage von g und h

b) dasselbe für g und f = (PQ) mit P(-1|5|4), Q(0|6|5)

c) die Spurpunkte von h

29. Gegeben: Dreieck , A(6|-1), B(-2|3), C(0|-8). Bestimme durch Rechnung:

a) die Länge der Seite AB

b) die Koordinaten des Mittelpunktes M_c von AB

c) die Koordinatengleichung (allg. Form) der Geraden c = (AB)

d) die Normalform der Gleichung der Mittelsenkrechten ℓ von AB

e) eine Gleichung der Höhe h_c sowie den Höhenfusspunkt H_c.

30. Gegeben sind die Geraden f: y = 2x + 15 und g: 3x + y - 65 = 0.

Berechne: a) die Koordinaten des Schnittpunktes von f und g

b) den Winkel $\alpha = \sphericalangle(f,g)$

c) die Gleichung einer Parallelen p zu f durch A(-5|-6).

31. Das Volumen eines Kreiskegels ist 60π. Von der Grundfläche sind der Mittelpunkt M(3|1|4) sowie die beiden Randpunkte P(6|1|4) und Q(3|1|7) gegeben. Die Spitze S liegt auf der Geraden g = (AB) mit A(5|7|0) und B(1|11|6). Bestimme S.

32. f: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$; g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; h: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Bestimme die gegenseitige Lage von f und g sowie von f und h.

b) g hat eine spezielle Lage im KS. Beschreibe sie.

Ebenengleichung

33. Bestimme die Koordinatengleichung der Ebene durch die Punkte A(4|-2|-2), B(7|2|4), C(0|-5|-3). Gib auch die Achsenabschnitte und die Gleichung der 2.Spur an.

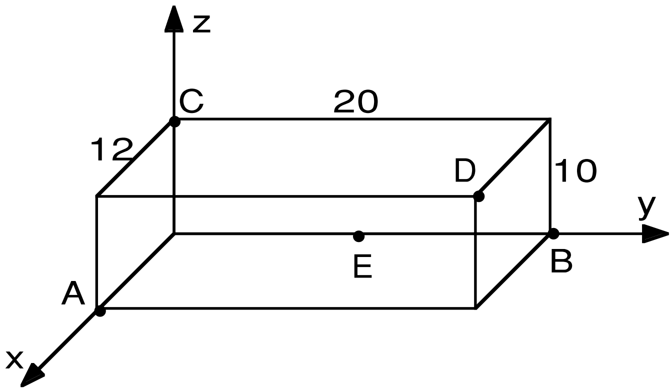
34. Bestimme den Durchstosspunkt S und Neigungswinkel α von g und E :

$$g:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad E:\ 5x + 6y - 2z - 20 = 0$$

35. Bestimme eine Parametergleichung der Schnittgeraden s der Ebenen E und F. E: $2x - y + 4z - 2 = 0$; F enthält die beiden Parallelen

$$g:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

36. Geg: Quader mit den Kanten 10,12, und 20 . (E ist Kantenmitte)



Bestimme die Koordinaten des Durchstosspunktes S der Geraden (DE) durch die Ebene ABC sowie den zugehörigen Neigungswinkel α.

37. Geg: A(4|-2|5), B(14|26|-9), C(8|4|9), D(10|20|-13).

a) Beweise, dass das Viereck mit den Ecken A, B, C und D ein Parallelogramm ist und gib die Reihenfolge der Ecken an.

b) Bestimme Koordinatengleichungen aller Ebenen, die durch den Ursprung gehen und von allen Parallelogramm-Ecken gleiche Abstände haben.

38. Bestimme die Koordinatengleichung der 2.-projizierenden Ebene, welche g enthält.

$$g:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

39. Beschreibe die spezielle Lage folgender Ebenen:
E_1: $3x - 7y + 3 = 0$; E_2: $4x - 5 = 0$; E_3: $2x + 3z = 0$; E_4: $y = 0$

40. Beschreibe die spezielle Lage folgender Ebenen:
E_1: $4y - 5z + 3 = 0$; E_2: $9y - 5 = 0$; E_3: $-7y + 3z = 0$; E_4: $x = 0$

41.

Geg: $P(0|-2|0)$; g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ges: Parameter- und Koordinatengleichung der Ebene E, welche durch P und g bestimmt ist.

42.

Geg: g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$; E_1: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

a) Bestimme den Durchstosspunkt S_1 von g durch E_1.

b) Dasselbe mit g und E_2: $3x - y + z + 2 = 0$.

c) Dasselbe mit g und E_3: $3x - 3y + z + 8 = 0$.

43. Bestimme eine Gleichung der Schnittgeraden von:
E_1: $x + 2y - z + 4 = 0$; E_2: $x - 4y + z - 2 = 0$.

44.

Geg: E: $x + 2y - 5z + 9 = 0$; g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Bestimme:

a) den Durchstosspunkt D von g durch E

b) die Schnittpunkte von E mit den Koordinatenachsen

c) eine Parametergleichung von E.

45. Gib die Koordinatengleichung für:

a) π_1

b) die Ebene E_1, die parallel ist zu π_2 und durch $P(1|1|1)$ geht

c) die Ebene E_2, die die z-Achse enthält und durch $P(1|1|1)$ geht

46. Gib die Koordinatengleichung für:

a) die Ebene E_1, die parallel ist zu π_3 und durch $P(3|3|3)$ geht

b) die Ebene E_2, die die y-Achse enthält und durch $P(3|3|3)$ geht

c) π_3

47. Sind E_1 und E_2 identisch oder nicht ? (Antwort begründen)

E_1: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; E_2: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

48. Geg: E: $x - 3y + z - 6 = 0$

Ges: a) Achsenabschnitte

b) Gleichung der 2.Spurgeraden

c) eine Parametergleichung von E

49. Geg: g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; h: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die Geraden g und h sind Spurgeraden einer Ebene E. Bestimme die Koordinatengleichung von E und eine Gleichung der noch fehlenden Spurgeraden.

50. Geg: E_1: $2x - y - 3z + 14 = 0$; E_2: $3x - 5y + z + 4 = 0$;

Ebene E_3 durch A(0|1|-3), B(1|2|1), C(1|3|-1).

Haben die drei Ebenen einen gemeinsamen Punkt ? (Wenn ja: welchen ? Wenn nein: warum nicht ?)

51. Gib eine Parametergleichung und die Koordinatengleichung der Ebene an, die durch die Punkte A(2|2|4), B(6|13|4) und C(1|3|7) geht.

52. Geg: E_1: $x + y + z = 1$; E_2: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bestimme:

a) eine Gleichung der Schnittgeraden von E_1 und E_2

b) eine Gleichung für eine Ebene E_3, die parallel zu E_2 ist und durch P(1|0|0) geht.

53. Von einer Ebene E sind die erste Spur s_1: $3x + 4y - 12 = 0$ und der Punkt P(1 | 1,5 | 1) bekannt.

a) Bestimme die Koordinatengleichung von E.

b) Durch E und die Koordinatenebenen ist ein Tetraeder bestimmt. Ermittle die vier Eckpunkte A, B, C und D, das Volumen V und die Oberfläche O dieses Tetraeders.

54. a) Bestimme die Achsenabschnitte der Ebene E: $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z = 1$

b) Bestimme mit Hilfe des Resultates von a) die Gleichung der Ebene mit den x-, y-, z-Achsenabschnitten 1, -3, 1/4.

55. Geg: $E_1: x - 2y + 2z + 15 = 0$;

$$E_2: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \; P(1\,|\,2\,|\,3).$$

Bestimme:

a) Den Abstand des Ursprungs und den des Punktes P von E_1,

b) den Winkel α zwischen E_1 und E_2,

c) den Winkel β zwischen E_1 und der Geraden $g = (OP)$.

56. Geg: A(1|2|3), B(-5|4|-1). P(x|y|z) hat von A und B gleiche Entfernung. Was lässt sich über die Koordinaten von P sagen?

Skalar- und Vektorprodukt

57. Geg: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ u \\ -7 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $\vec{a} \perp \vec{b}$. $u = ?$

58. Geg: A(3|-4|6), B(8|8|8).
Bestimme den Punkt P auf der z-Achse so, dass $\sphericalangle APB = 90°$

59. Berechne die Länge der kürzesten Verbindungsstrecke von g und h. Gib auch die Endpunkte dieser Strecke an.

$$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad h: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

60. Geg: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

Berechne $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ und beweise, dass $\vec{c}$ senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht.

61. Gib eine Gleichung der Schnittgeraden g und den Schnittwinkel α der Ebenen E und F: E: $3x - 4y + z = 0$; F: $5x - 2y + 3z - 10 = 0$

62. Die Ebenen E_1: $3x - 5y + z - 4 = 0$ und E_2: $2x - 4y + z + 7 = 0$ sowie der Punkt P(5|2|-3) sind gegeben.

a) Wie heisst die Koordinatengleichung der Ebene F, welche durch P geht und die normal zu E_1 und E_2 steht ?

b) Der Punkt Q(2] 3] -1) hat von der Geraden g, die durch P geht und die parallel zuE_1 und E_2 ist, den Abstand a. Berechne a!

63. Bestimme den Abstand des Punktes A von der Geraden g = (BC):
A(0|3|7), B(1|2|-1), C(4|4|-3)

64. Eine dreiseitige Pyramide ist durch die Eckpunkte A(8|-2|3), B(0|5|-3), C(-4|7|-6) und D(16|1|-16) gegeben.

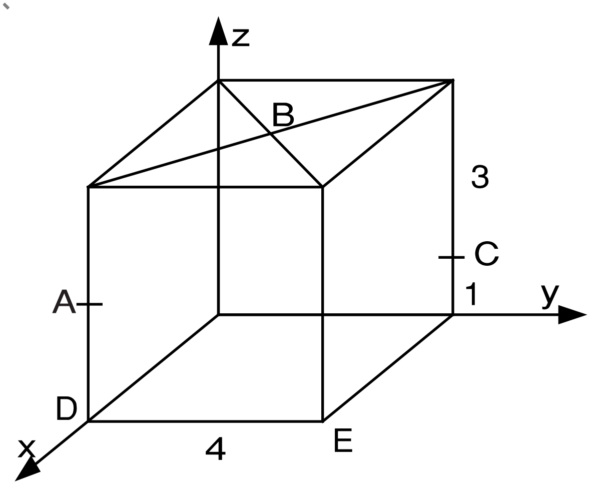
a) Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

b) Berechne das Volumen der Pyramide.

65. A ist Kantenmittelpunkt des Würfels.

a) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

b) Ein Punkt P liegt auf der Kante DE. Welche Koordinaten hat P, wenn der Flächeninhalt des Dreiecks APB genau $2 \cdot \sqrt{6}$ beträgt ?



66. Geg: A(7 | 2 | -5), B(11 | -4 | -13), C(3 | -7 | -1), D(1 | -4 | 3).

a) Beweise: Das Viereck ABCD ist ein Trapez

b) Berechne die Endpunkte der Mittelparallele sowie die Fläche des Trapezes (runden auf 4 signifikante Ziffern).

67. Von einer dreiseitigen Pyramide sind die Eckpunkte A(8|-2|3), B(0|5|-3) und C(-4|7|-6) bekannt. Die Kante AD steht senkrecht auf der Ebene durch A, B und C und hat die Länge 10. Bestimme den Punkt D, das Volumen der Pyramide sowie den Winkel $\alpha = \sphericalangle CAB$.

68. Gib eine Gleichung der Geraden f an, welche durch P(1 | 0 | 3) geht und normal zu den beiden Geraden g und h steht.

$$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

69. Gegeben sind die Ebene E_1: $x - 2y + 3z - 7 = 0$, die Punkte A(4 | -6 | -3), B(0 | -2 | 1) und C(-5 | -3 | -12) sowie die Gerade g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

a) Bestimme den Winkel α zwischen E_1 und π_1, den Winkel β zwischen E_1 und g, die Koordinatengleichung der Ebene E_2 durch die Punkte A, B und C sowie die Gleichung der Schnittgeraden s von E_1 mit E_2 .

b) Spiegle die Gerade g an E_1 und gib die Gleichung von g^*.

c) Welche Punkte der Geraden g haben von E_1 und E_2 gleiche Abstände und wie gross sind diese ?

Hessesche Normalform

70. Geg: E_1: $10x - 11y + 2z - 11 = 0$; E_2: $4y - 3z - 8 = 0$;

$$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ges: a) $\alpha = \sphericalangle (E_1, E_2)$,

b) $\beta = \sphericalangle (g, E_1)$,

c) Abstand a des Ursprungs von E_2,

d) Abstand d des Punktes P(1|-1|-5) von E_1,

e) Koordinatengleichung der Ebene E_3, die parallel zu E_1 ist und durch Q(1|1|1) geht,

f) Koordinaten aller Punkte auf g, die von E_1 und E_2 gleichen Abstand haben,

g) Spiegelpunkt S´ von S(5|-5|-2) bezüglich E_1.

71. Geg: Dreieck A(-5|-6) B(-4|2) C(0|-1).

Ges: a) Länge von h_a,

b) Winkel β,

c) Gleichung von w_γ in der Form $y = mx + q$, m und q auf 4 signifikante Ziffern gerundet,

d) Schnittpunkt S der Mittelsenkrechten m_b mit der Seite c.

72. Geg: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

a) Prüfe mit diesen drei Vektoren das Distributivgesetz:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$$

b) Bestimme den Winkel α zwischen $\vec{a}$ und $\vec{c}$.

c) Bestimme einen Vektor $\vec{v}$, der parallel zur xy-Ebene und normal zu $\vec{b}$ ist.

d) Bestimme die Koordinatengleichung jener Ebene durch P(1|2|3), die senkrecht zu $\vec{a}$ steht.

73. Gib eine **Parameter**gleichung der Ebene E, welche durch P(1|0|3) geht und orthogonal ist zu den Ebenen

$$E_1\!: 3x + 2y - z + 4 = 0 \text{ und } E_2\!: x + y + z - 3 = 0.$$

Leite aus der Parametergleichung die **Koordinaten**gleichung von E her.

74. Geg: P(14|7|-11) ; R(5|1|4) ; Q(3|13|2) .

Ein Strahl geht vom Punkt P aus, wird an der Ebene E im Punkt R reflektiert und geht dann durch den Punkt Q. Bestimme die Koordinatengleichung von E (Tip: Bestimme zuerst P´).

75. Geg: P(1|3|0), Q(3|2|1), F: $4x + 3y - 2 = 0$

Bestimme die Koordinatengleichung der Ebene E, die durch die Punkte P und Q geht und normal zur Ebene F steht.

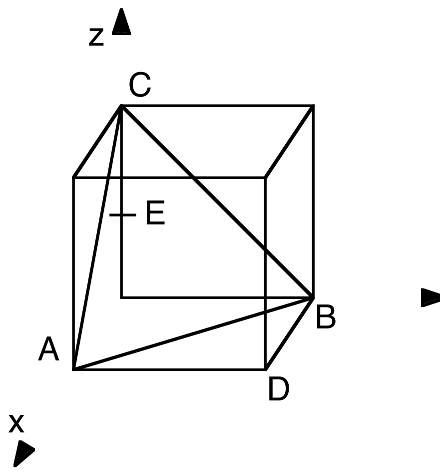
76. Geg: g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, E: $x - 3y - 2z + 42 = 0$

Die Gerade g wird an der Ebene E gespiegelt. Bestimme eine Gleichung der Spiegelgeraden g´.

77. Im Glaswürfel mit Kante 6 ist E Kantenmitte, ABC eine Spiegelebene. Ein Lichtstrahl geht von D aus in Richtung des Punktes E und wird an der Ebene ABC reflektiert.

a) Bestimme die Gleichung des reflektierten Lichtstrahls.

b) In welchem Punkt durchstösst dieser Lichtstrahl den Glaswürfel ?



78. Bestimme den Schnittwinkel der Ebenen E und F:

E: $3x - 2y + 5z - 2 = 0$

F ist bestimmt durch P(3|-1|4) und g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

79. Bestimme den Schnittwinkel der Geraden g mit der Ebene E:

E: $2x - 5y + z + 3 = 0$; g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

80. Zur Ebene E: $4x - 4y - 7z + 6 = 0$ soll durch P(3|-4|1) die Parallelebene F gelegt werden. Bestimme die Koordinatengleichung von F sowie den Abstand der beiden Ebenen.

81. Bestimme die Koordinatengleichungen der Parallelebenen zur Ebene E: $11x - 2y + 10z - 15 = 0$ im Abstand $a = 3$.

82. Welche Punkte auf der Geraden g = (AB) haben von den Ebenen E und F gleiche Abstände?
E: $14x - 7y - 22z + 38 = 0$; F: $4x + 7y - 4z + 2 = 0$; A(6|3|2), B(9|5|0)

83. a) Welche Punkte auf der z-Achse haben den gleichen Abstand von den Ebenen E: $6x + 6y - 3z + 2 = 0$; F: $x - 2y + 2z - 4 = 0$?

b) Welcher dieser Punkte hat den kleineren Abstand von E ?

84. Ein Lichtstrahl geht von A(-2|-4|6) aus und wird im Punkt B(2|-6|?) der Ebene E: $4x - 3y - z - 24 = 0$ reflektiert.
In welchem Punkt schneidet der reflektierte Strahl die xy-Ebene ?

85. Welcher Punkt auf der Geraden g hat von den Punkten A und B den gleichen Abstand ?

$$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; A(-1|\;2|\;1),\; B(\;3|\;4|\;7)\;.$$

Kreise

86. Gib die Gleichungen der Tangenten von P(2 | 14) an den Kreis k mit Mittelpunkt M(-2 | 6) und Radius $r = 2 \cdot \sqrt{10}$.

87. A(-1|6) liegt auf einem Kreis mit Radius r = 5. Der Kreismittelpunkt liegt auf der Geraden g: y = -x + 10. Bestimme die Kreisgleichung.

88. Bestimme die Gleichung des Kreises mit Mittelpunkt M(3|5), der die Gerade g: 4x - 3y + 10 = 0 berührt.

89. Welche Punkte des Kreises k: $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 65$ sind gleichweit von den Punkten A(-4|7) und B(2|3) entfernt ?

90. Der Punkt P(7|y) mit y < 0 liegt auf dem Kreis k: $(x - 14)^2 + (y - 9)^2 = 338$. Durch P ist eine Sekante s zu legen, die parallel zur Geraden
g: 12x + 5y - 8 = 0 verläuft.

a) Gib eine Koordinatengleichung von s.

b) Wie lange ist die Sehne, die k aus s schneidet ?

91. P(-2|3) ist Mittelpunkt der Sehne s des Kreises k: $(x - 6)^2 + (y - 9)^2 = 200$.

a) Bestimme eine Koordinatengleichung der Sekante g, auf der die Sehne s liegt.

b) Wie lang ist s ?

92. Bestimme eine Gleichung der Tangente im Punkte P(-3|9) des Kreises
k: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 169$.

93. Bestimme Gleichungen der Tangenten an k: $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$, die parallel zu g: 4x + 3y -7 = 0 sind.
(Tip: Wie würden diese Tangenten konstruiert ?)

94. a) Lege von P(-4| 2) aus die Tangenten an k: $x^2 + y^2 = 10$ (bestimme die Tangentengleichungen).

b) Zeige, dass die beiden Tangenten normal aufeinander stehen.

95. Der Kreis k ist bestimmt durch die Punkte A(0|12), B(-4|0) und U(0|0). Gib die Koordinatengleichungen der Tangenten von P(2|14) an k.

96. Bestimme Mittelpunkte und Radien der Kreise, die den Kreis k umschliessend und die beiden Koordinatenachsen berühren.
$k: (x - 7)^2 + (y - 14)^2 = 25$

97. Bestimme Mittelpunkte und Radien der Kreise, die die y-Achse berühren und die Kreise k und k′ je von aussen berühren:
$k: x^2 + y^2 - 26x - 6y + 153 = 0$ $\qquad$ $k': x^2 + y^2 + 8x + 6y - 75 = 0$

98. Geg: Kreis $K_1: (x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 9$.

a) Bestimme die Schnittpunkte von K_1 mit $g: 2x - y - 4 = 0$.

b) Bestimme die Mittelpunkte und Radien aller Kreise, die K_1 berühren, durch P(3|7) gehen und die x-Achse berühren.

99. Geg: $K_1: (x + 4)^2 + y^2 = 1$; $K_2: (x - 4)^2 + (y + 8)^2 = 81$.
Ges: Mittelpunkt und Radius aller Kreise, die K_1, K_2 und die x-Achse berühren.
Bem: Nicht-rationale Ergebnisse dürfen als Näherung (4 signifikante Ziffern) angegeben werden.

100. Bestimme Mittelpunkt und Radius folgender Kreise:

a) $k: x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$

b) $k: x^2 + y^2 + 34x + 8y + 304 = 0$

c) $k: 3x^2 + 3y^2 + 4x + 3y = 0$

101. Bestimme die Schnittpunkte folgender Geraden und Kreise:

a) $k: x^2 + y^2 = 25$; $g: 2x - y - 5 = 0$

b) $k: x^2 + y^2 - 12x + 16y = 0$; $g: x - 2y - 32 = 0$

c) $k: x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$; $g: 3x - 4y - 19 = 0$

102. Bestimme Mittelpunkt und Radius eines Kreises, der die Koordinatenachsen berührt und durch P(2|-1) geht.

103. Bestimme Mittelpunkt und Radius eines Kreises, der durch $A(-8|6)$ und $B(-1|-1)$ geht und die x-Achse berührt.

104. Bestimme Mittelpunkt und Radius eines Kreises, der durch $A(6|-1)$ und $B(4|5)$ geht und dessen Mittelpunkt auf der Geraden $g\colon\ 3x + 5y - 11 = 0$ liegt.

105. Schraffiere folgende Gebiete und bestimme die Eckpunkte:
a) $\mathbf{G} = \{P(x|y) \mid x^2+y^2 \geqslant 4 \text{ u } x^2+y^2 \leqslant 16 \text{ u } x \geqslant -3 \text{ u } y \geqslant -x+4\}$
b) $\mathbf{G} = \{P(x|y) \mid x^2+y^2 \geqslant 4 \text{ u } (x-2)^2+y^2 \leqslant 16 \text{ u } y \leqslant x \text{ u } y \geqslant -2\}$

106. a) Bestimme Mittelpunkt M und Radius r des Kreises
$k\colon x^2 + y^2 - 8x + 6y - 11 = 0$
b) Bestimme die **allgemeine** Form der Gleichung eines Kreises mit Mittelpunkt $M(11|-10)$ und Radius $r = 3$.

107. Gegeben: Kreis $k\colon (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$
Gerade $g\colon y = 2x - 12$
a) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte von g und k.
b) Bestimme den Abstand des Kreismittelpunktes M von g.
c) Die Kreislinie k wird von g in zwei Bogen zerlegt. Berechne die Länge des kleineren der beiden Bogen. Gib auch an, wieviele % des Kreisumfanges diese Bogenlänge ausmacht.

108. Gib die Gleichungen der Tangenten von $P(2 \mid 14)$ an den Kreis k mit Mittelpunkt $M(-2 \mid 6)$ und Radius $r = 2\cdot\sqrt{10}$.

109. Gegeben: $K_a\colon\ x^2 + y^2 - 6x - 26y + 153 = 0$; $K_b : x^2 + y^2 + 6x + 8y - 75 = 0$
a) Bestimme die Gleichungen der Tangenten von $P(0 \mid 21.5)$ an K_a.
b) Bestimme die Gleichung *aller* Kreise, die die x-Achse und K_a und K_b berühren (irrationale Grössen auf 3 geltende Ziffern runden).

110. Gegeben: Punkt $P(6 \mid 2)$, Kreis k_1 mit Mittelpunkt $M_1(13 \mid 1)$ und Radius $r_1 = 5$, Kreis $k_2\colon\ x^2 + y^2 + 8x + 10y - 59 = 0$.
a) Bestimme die Gleichungen der Tangenten von P an k_1. Gib auch die beiden Berührpunkte B_1 und B_2 an.
b) Die Gerade $g = (B_1B_2)$ schneidet von k_1 ein Segment ab. Bestimme, wieviel % der Fläche von k_1 die Segmentfläche ausmacht.
c) Bestimme die Mittelpunkte und Radien aller Kreise, die k_1 und k_2 von aussen berühren und ausserdem die y-Achse berühren.

Kugeln

111. Geg: K: $(x+3)^2 + (y-5)^2 + (z+4)^2 = 49$; $\quad$ g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Zeige, dass g Tangente an K ist und bestimme den Berührpunkt.

112. Wie heisst die Gleichung der Kugel mit dem Mittelpunkt M(6|5|-3), welche die Ebene E: $x - 2y + 2z - 5 = 0$ berührt ?

113. Geg: P(3|1|-2) ; g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

P liegt auf einer Kugel mit Radius R = 3. Der Mittelpunkt dieser Kugel liegt auf der Geraden g. Bestimme die Kugelgleichung und den Abstand a des Punktes P von g.

114. Die Kugel K: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 12z = 19$ ist gegeben. Der Punkt P(-2|8|13) liegt auf einer zu K konzentrischen Kugel K´. Welchen Radius hat diese ?

115. Bestimme die Gleichungen der Kugeln mit Radius R = 42, die die Ebene E: $8x - 19y - 4z - 29 = 0$ im Punkt P(10|1|?) berühren.

116. Bestimme die Gleichungen der Tangentialebenen an die Kugel K, die parallel zur Ebene E sind.
K: $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2z - 64 = 0$; E: $2x - 2y + z - 7 = 0$

117. Zeige, dass sich die Kugeln K_1: $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 36$ und K_2: $x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 20y - 24z + 188 = 0$ berühren und bestimme die Gleichung der gemeinsamen Tangentialebene.

118. Der Lichtstrahl $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 22 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -16 \\ 1 \end{pmatrix}$ geht von P(3|22|-6) aus und wird an der Kugel K: $(x - 3)^2 + (y + 8)^2 + z^2 = 225$ reflektiert.

a) Welche Koordinaten hat der Reflexionspunkt ?

b) Bestimme eine Parametergleichung für den refektierten Lichtstrahl g´.

c) Wie gross ist der Winkel zwischen g und g´ ?

119. Ein von P(20|6|0) in Richtung Q(12|2|2) laufender Lichtstrahl wird an der xz-Ebene im Punkte R reflektiert und trifft nachher im Punkte S die Kugel K: $x^2 + y^2 + z^2 - 8y - 10z + 20 = 0$. Bestimme die Koordinaten von R und S.

120. Gegeben ist eine unendliche Folge von nebeneinanderliegenden Kugeln, die sich auf der y-Achse berühren. Die Radien aufeinanderfolgender Kugeln bilden eine geometrische Folge. Die zweite Kugel hat die Gleichung $K_2: x^2 + y^2 + z^2 - 8y = 0$, die vierte Kugel hat die Gleichung $K_4: x^2 + y^2 + z^2 - 26y + 168 = 0$.

a) Wie lautet die Gleichung der ersten Kugel ?

b) Welche Nummer hat die grösste Kugel, deren Volumen kleiner als 0.001 ist ?

c) Wie heisst die Gleichung der kleinsten Kugel, die alle (unendlich vielen) Kugeln der Folge umschliesst ?

121. Gegeben sind die Punkte A(1 | 0 | 0), B(40 | 1 | -2), L(0 | 1 | -2) und eine Kugel K mit dem Mittelpunkt M(6 | -7 | 4) und dem Radius $r = \sqrt{56}$. Ein Lichtstrahl g läuft von L aus in Richtung von A, wird zuerst an K und anschliessend an der yz- Ebene reflektiert und trifft dann normal auf eine Ebene E, welche den Punkt B enthält.

a) Bestimme die beiden Reflexionspunkte.

b) Wo trifft der Lichtstrahl die Ebene E ?

122. Gegeben sind die Kugel K: $x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 8 = 0$ sowie die Punkte A(-1|9|8) und B(1|10|10). Gib die Gleichungen der Tangentialebenen von K an, die normal zur Geraden g = (AB) stehen.

123. Gegeben sind die Kugel K: $x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 8 = 0$ und die Ebene E durch die Punkte A(-1|9|8), B(1|10|10) und C(-5|5|8).

a) Welcher Punkt der Kugel hat von E den kürzesten Abstand und wie gross ist dieser ?

b) Bestimme die Gleichung der kleinsten Kugel, die K und E berührt.

c) Gib die Gleichungen der Tangentialebenen von K an, die normal zur Geraden g = (AB) stehen.

124. Gegeben sind die Punkte A(1 | 4 | -6) und B(7 | -2 | -3).

a) Unter welchem Winkel erscheint die Strecke AB von C(3 | 2 | 0) aus ?

b) Berechne das Volumen der Pyramide mit der Spitze in O(0 | 0 | 0) und den weiteren Ecken A, B und C.

c) Zeige, dass die Menge aller Punkte P(x , y , z) mit $\overline{PA} = 2 \cdot \overline{PB}$ eine Kugel ist und gib Mittelpunkt und Radius an.

d) Gib eine Gleichung der Geraden g = (AB) an. Spiegle dann g an π_1 (–> g*) und bestimme den Durchstosspunkt von g* durch π_2.

Vektorgeometrie: Lösungen

1. ----

2. a) b) $a = 9 \Rightarrow \vec{b} = (15 \mid -30 \mid -30)$, $\vec{v} = (-1/3 \mid 2/3 \mid 2/3)$

3. a) $\vec{a} = k\vec{b} \Longrightarrow 5 = 8k \Longrightarrow k = 5/8$; $x = 5/8 \cdot (-2) \Longrightarrow x = -5/4$
$7 = 5/8 \cdot y \Longrightarrow y = 56/5$
b) $-2x + 7y = -40 \Rightarrow (x|y) = (x \mid (2x-40)/7)$, z.B $(x|y) = (6 \mid -4)$

4. a) $\vec{v} = (18 \mid -1 \mid 42)$ b) $\vec{d} = 3\vec{a} + \vec{b} - 4\vec{c}$

5. $AP^2 = 9 {*} BP^2 \Rightarrow (121\ 64\ (z+9)^2 = 9(36 + 9 + (z-5)^2) \Rightarrow$
$P_1(0\ /\ 0\ /\ 7)$, $P_2(0\ /\ 0\ /\ 6.5)$

6. υ a) $D(9 \mid -13)$
b) $S(7/3 \mid 3)$
c) $u = 17\cdot\sqrt{2} + 7\cdot\sqrt{2} + 26 = 59.9$
d) $(x - 16)^2 + (y + 6)^2 = (x + 1)^2 + (y - 11)^2 = (x + 8)^2 + (y - 4)^2$
$34x - 34y = 170$ und $48x - 20y = 212 \Longrightarrow M(4| -1)$
$r = \overline{MA} = \sqrt{(12^2 + 5^2)} = 13$
e) $\cos\gamma = (24]-10)(7]7)/182\sqrt{2} => \gamma = 67.62°$
$\vec{w} = (24]-10)/26) + (7]7)/7\sqrt{2} = (12/13 + 1/\sqrt{2} \mid -5/13 + 1/\sqrt{2})$

7. $\overrightarrow{AQ} = 2/3 \cdot \overrightarrow{AD} + 2/3 \cdot \overrightarrow{AE}$

8. ----

9. c) Mittelpunkt und Radius des Umkreises.

a) $\overline{AB} = 4$; $\overline{AC} = 15$; $\overline{BC} = 13$; $U = 32$
b) $\vec{W} = \overrightarrow{BA}/\overline{BA} + \overrightarrow{BC}/\overline{BC} = (-4 \mid 0)/4 + (5 \mid 12)/13 = 1/13 \cdot (-8 \mid 12)$
c) $(x + 4)^2 + (y + 6)^2 = x^2 + (y + 6)^2 = (x - 5)^2 + (y - 6)^2$
$\Longrightarrow M(x \mid y) = M(-2 \mid 15/8)$; $r = 65/8 = 8.125$

10. a) $\vec{u} = (-3|16|-17)$
b) $-\vec{c} + \vec{a} = (-9|-5|-2) \Longrightarrow \vec{v} = (18|10|4)$
c) $4\cdot I - 5\cdot II$: $-11x + 27y = 60$ und III: $-2x + 5y = 11$
$\Longrightarrow y = 1, x = -3, z = -0{,}5 \Longrightarrow \vec{w} = -3\vec{a} + \vec{b} - 0{,}5\vec{c}$

11. P(-2 | 8 | 0), Q(5 | 1 | 2)

12. a = 45 ==> $\vec{v}$ = 50/45 · $\vec{a}$ = 1/3 · (140 | -50 | 20)

13. a) k = −3/4 b) a·$\vec{u}$ + b·$\vec{v}$ = $\vec{w}$ ==> b = −1 ==> a = 2 ==> k = 0
c) $1 + k^2 + 16 = 25$ ==> k = ± $2\cdot\sqrt{2}$

14. $45 + (y - 6)^2 = 4[11.25 + (y - 7.5)^2]$ ==> P_1(0 | 7 | 0), P_2(0 | 9 | 0)

15. ----

16. a) $\vec{u}$ = (7 | 23 | -8) b) $\vec{x}$ = (10 | 1 | -2)
c) I: 13 = −3x + y − 6z; II: 17 = 4x + 3y − 2z; III: −16 = −2x + 4z
=> (x|y|z)=(2|1|-3) => $\vec{w} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$

17. 3(−4 + 2t) − (−10 + 3t) + 4(8 − 2t) − 15 = 0; 15 − 5t = 0; t = 3 ==> S(2|−1|2)

18. P(x|0); $\overline{AP} = \overline{BP}$ => $(x - 8)^2 + 4^2 = (x - 16)^2 + 24^2$
=> 16x − 752 = 0 => x = 47 => P(47 | 0)

19. a = 9 => $\vec{b}$ = −45/9 · $\vec{a}$ = (15 | −30 | −30)

20. a) $\overline{AB}$ = 12 ; $\overline{AC}$ = 10 ; $\overline{BC}$ = 18 ; U = 40
b) cos $\gamma = \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}/\overline{CA}\cdot\overline{CB}$ = (−6|0|−8)·(−2|−8|−16)/180 = 140/180
=> γ = 38.94°
c) $\vec{w} = \overrightarrow{BA}/\overline{BA} + \overrightarrow{BC}/\overline{BC}$ = (−4|−8|8)/12 + (2|−8|16)/18
= (−1|−2|2)/3 + (1|−4|8)/9 = 1/9 · (−2 | −10 | 14) => $\vec{w}$ = (−1 | −5 | 7)

21. a) nicht ∥; $-3 - t1 = 4 + t2$ ⇒ $t_1 = -3$; $t_2 = -4$ ⇒ $\exists$ S(0|0|-3)

$6 + 2t1 = 0$

$t1 = -3$

b) (-1|2|1) = -1/3(3|-6|-3) => ∥ ; P(-3|6|0) $\in$ h ?

$-3 = 1 + 3t \Rightarrow t = -4/3$; $6 = -6t \Rightarrow t = -1$; $0 = 3 - 3t \Rightarrow t = 1$ ==> f∥h; f $\neq$ h

c) ∥ x-Achse oder $\perp \pi_2$(1/2P);

g $\subset$ xz-Ebene= π_3 oder ∥xy- und xz-Ebene (1/2P)

d) Gib einen Richtungsvektor einer der beiden Winkelhalbierenden von f und g an.

e) Spiegle f an Z(3|3|3) (Gib eine Gleichung von f´).

d) $\vec{w} = 1/\sqrt{6}(-1|2|1) \pm (1|0|0) = (-1/\sqrt{6} \pm 1|2/\sqrt{6}|1/\sqrt{6})$

e) P(-3|6|0); $\overrightarrow{OP}' = \overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{PZ}$ = (3|3|3) +(6|-3|3) ; P´(9|0|6)

f´: $\vec{r}$ = (9|0|6) +t· (-1|2|1)

22. a) nicht ∥; $-2 + 3t_1 = -3$ ⇒ $t_1 = -1/3$;

$4 - 6t_1 = 0$ ⇒ $t_1 = 2/3$ ==> f,g windschief

$1 - 3t_1 = 2 + t_2$

b) (3|-6|-3) = -3(-1|2|1) => ∥ ; P(-2|4|1) $\in$ h ?

$-2 = 1 - t \Rightarrow t = 3$; $4 = 2 + 2t \Rightarrow t = 1$; $1 = 3 + t \Rightarrow t = -2$ ==> f∥h; f $\neq$ h

c) ∥ z-Achse oder $\perp \pi_1$ (1/2P);

g $\subset$ xz-Ebene oder ∥zy- und xz-Ebene) (1/2P)

d) P(-2|4|1); $\overrightarrow{OP}' = \overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{PZ}$ = (1|2|3) +(3|-2|2) ; P´(4|0|5)

f´: $\vec{r}$ = (4|0|5) + $t_/$(3|-6|-3)

e) S_1(4|-4|0), S_2(0|4|4); S_3(2|0|2)

d) $\vec{w} = 1/\sqrt{6}(-1|2|1) \pm (0|0|1) = (-1/\sqrt{6}|2/\sqrt{6}|1/\sqrt{6} \pm 1)$

d) Gib einen Richtungsvektor einer der beiden Winkelhalbierenden von g und h an.

23. a) g: $\vec{r} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PQ}$ = **(1|5|0) + t(-1|2|-3)**

b) y = 0 ==> 5 + 2t = 0 ==> t = -5/2 ==> **R(7/2|0|15/2)**

c) z = +12 ==> t = -4 ==> **S_1(5|-3|12)**

z = -12 ==> t = 4 ==> **S_2(-3|13|-12)**

d) $126 = (1 - t - 1)^2 + (5 + 2t - 5)^2 + (-3t - 0)^2 = 14t^2 \Rightarrow t^2 = 9$

t = ±3 ==> **T_1(-2|11|-9); T_2(4|-1|9)**

24. a: y = -3/14 · x + 36/7; 3x + 14y - 72 = 0

b: y = -9/2 · x - 12 ; 9x + 2y + 24 = 0

c: y = 1/2 · x - 2 ; x - 2y - 2 = 0

a) m(hc) = -2 = (y - 6)/(x + 4) => hc: y = -2x - 2 ; 2x + y + 2 = 0

Hc(0|-2)

b) $\beta = \sphericalangle$(ac): tan β = 4/5 ; β = 38.7°

$\gamma = \sphericalangle$(ab); tanγ = 24/11; γ = 65.4°

Kontrolle. tan α = 4 ; α = 76.0°

c) Mc(4|0); sc: $\vec{r}$ = (4|0) + t·(8|-6) (y = -3/4 · x + 3)

m(hc) = -2 => $\vec{a}$ = (1|-2) => mc: $\vec{r}$ = (4|0) + t·(1|-2) (y = -2x + 8)

25. a) y = -6/5·x + 2; m = -6/5; φ = arctan(-6/5) = 130° (-50,19°); q = 2 p = 5/3

b) -6/5 · 2.9 + 2 0 -1.48 ==> P $\notin$ g

c) m_2 = -3/5, tan(α) = |(-6/3 + 3/5)/(1 + 18/25)| = 15/43 ==> α = 161°

26. m_1 = -4/3 ==> 1 = |(m+4/3)/(1-m·4/3)| ==> ±(1-4m/3) = m+4/3 ==> m = 7 od -1/7

==> g_1: 7x - y - 32 = 0 ; g_2: x - 7y - 39 = 0

27. (GH) ∥ z-Achse <=> $x_G = x_H$ und $y_G = y_H$ <=> 11 + t = 7 und -6 - 2t = -7 + 3t′

=> t = -4 und t′= 3 => G(7|2|9), H(7|2|8)

28. a) g ∦ h, g ∩ h: I und II => t = 2 und t′= 1; das ist keine Lösung von III

=> g, h: windschief

b) f: $\vec{r} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PQ}$ = (-1|5|4) + t·(1 | 1 | 1)

g ∦ f, g ∩ f: I und II => t = 3 und t′= 0; das ist auch Lösung von III

=> g, f inzident in S(-1 | 5 | 4)

c) S_1(-15 | 13 | 0), S_2(0 | 3 | 5), S_3(9/2 | 0 | 13/2)

29. a) $\overline{AB} = \sqrt{80}$ = 8,94

b) Mc(2|1)

c) c: x + 2y - 4 = 0

d) ℓ: y = 2x - 3

e) hc: y = 2x - 8 ; Hc(4|0)

30. a) $2x + 15 = -3x + 65 \implies 5x = 50; x = 10 \implies S(10|35)$
b) $m_1 = 2; m_2 = -3; \tan\alpha = |(-3-2)/(1-2\cdot 3)| = 1 \implies \alpha = 45°$
c) $m = 2; -6 = 2\cdot(-5) + q \implies q = 4 \implies p: y = 2x + 4$

31. Grundkreis $\parallel \pi_3$; Radius $r = \overline{MQ} = 3$; $h = 60\pi\cdot 3/(\pi\cdot 3^2) = 20$
$\implies S((x|1\pm 20|z)$; $g: \vec{r} = (5|7|0) + t(4|-4|-6)$
$s \in g \implies S_1(-9|21|21); S_2(31|-19|-39)$

32. a) nicht $\parallel$;
$$\left.\begin{array}{l} -2 + 3t_1 = -3 \\ 4 - 6t_1 = 0 \\ 1 - 3t_1 = 2 + t_2 \end{array}\right| \begin{array}{l} \Rightarrow t_1 = -1/3; \\ \Rightarrow t_1 = 2/3 \implies \textbf{f,g windschief} \\ \end{array}$$

a_2) $(3|-6|-3) = -3(-1|2|1) \Rightarrow \parallel$; $P(-2|4|1) \in h$?
$-2 = 1 - t \Rightarrow t = 3$; $4 = 2 + 2t \Rightarrow t = 1$; $1 = 3 + t \Rightarrow t = -2 \implies$ **f$\parallel$h; f $\neq$ h**
b) **$\parallel$ z-Achse oder $\perp \pi_1$**
g $\subset$ xz-Ebene oder $\parallel$zy- und xz-Ebene)

33.
$$\left.\begin{array}{l} x = 4 + 3u - 4v \\ y = -2 + 4u - 3v \\ z = -2 + 6u - v \end{array}\right|$$
E: $2x - 3y + z - 12 = 0$
$S_1(6|0|0); S_2(0|-4|0); S_3(0|0|12)$
s_2: $-3y + z - 12 = 0$

oder: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (3|4|6) \times (-4|-3|-1) = (14|-21|7) \Rightarrow$ E: $2x - 3y + z + d = 0$ ....

34. $5(-1 + 5t) + 6(0) - 2(-1 + t) - 20 = 0; -23 + 23t = 0; t = 1; \implies S(4|0|0)$

35. (F: $x + y - 8z - 18 = 0$)
$g \cap E: 2(2 + t) - (-t) + 4(-2) - 2 = 0; t = 2 \implies P(4|-2|-2)$
$h \cap E: 2(7 - t) - (3 + t) + 4(-1) - 2 = 0; t = 5/3 \implies Q(16/3 \mid 14/3 \mid -1)$
$\implies s: \vec{r} = (4 \mid -2 \mid -2) + t(4 \mid 20 \mid 3)$

36. E(ABC): x/12 + y/20 + z/10 = 1 ==> **5x + 3y + 6z - 60 = 0**
D(12|20|10); E(0|10|0); **g = (DE): $\vec{r}$ = (0|10|0) + t(12|10|10)**
$g \cap E$: 5·12t + 3(10 + 10t) + 6·10t - 60 = 0
t = 1/5 ==> S(2,4 | 12 | 2) = **S(12/5 | 12 | 2)**

b) $\sin\alpha$ =](2] -1] 3) · (1] 5] 3)] / (√14 · √25) = 6/(7 · √10) => **α = 15.723°**

37. a) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$ = (4|6|4); $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$ = (6|22|-18) ==> ‖-ogrammACBD
b) M(AD)(7|9|-4); M(CB)(11|15|0); M(AC)(6|1|7);M(DB)(12|23|-11)
E_1 durch O, M(AD), M(CB) : $\vec{r}$ = u·(7|9|-4) + v·(11|15|0)
==> E_1: 30x - 22y + 32z = 0
E_2 durch O, M(AC), M(DB): $\vec{r}$ = u·(6|1|7) + v·(12|23|-11)
==> E_2: 86x - 75y - 63z = 0
E_3 ‖ ACBD mit z.B. $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$: $\vec{r}$ = u(10|28|-14) + v(4|6|4)
oder $\vec{r}$ = u(6|22|-18) + v(2|16|-22)==>E_3: 49x - 24y - 13z = 0

38. z.B.: E: $\vec{r}$ = (2|-1|3) + t(1|5|3) + v(1|0|0); x ist bel; 3·II-5·II
==> **E: 3y - 5z + 18 = 0**
oder Ansatz: E: By + Cz + D = 0; P(2|-1|3), Q(3|4|6) ∈ E ....
oder n_E = (1|5|3)x(1|0|0) = (0|3|-5) => E: 3y - 5z + d = 0 etc

39. E_1: ‖ z-Achse (1.-proj. ; ⊥ π_1) E_2: ‖π_2 (2. Hauptebene)
E_3: enthält y-Achse (3.-proj. durch O) $E_4 = \pi_3$

40. E_1: ‖ x-Achse (2.-proj. ; ⊥ π_2) E_2: ‖π_3 (3. Hauptebene)
E_3: enthält x-Achse (2.-proj, durch O) $E_4 = \pi_2$

41. Q(2|-1|0); $\overrightarrow{PQ}$ = (2|1|0);
E: $\vec{r} = \overrightarrow{OP} + u\overrightarrow{PQ} + v\vec{a}$ = (0|-2|0) + u(2|1|0) + v(1|-1|1)
==> E: x - 2y - 3z - 4 = 0

42. a) E_1: 2x - 2y - z + 17 = 0
$g \cap E_1$: 2(-1 + 4t) -2(3 + 5t) - (4 + 3t) + 17 = 0 ==> t = 1 ==> S_1(3|8|7)
b) $g \cap E_2$: 3(-1 + 4t) - (3 + 5t) + (4 + 3t) + 2 = 0 ==> t = 0 ==> S_2(-1|3|4)
c) $g \cap E_3$: 3(-1 + 4t) - 3(3 + 5t) + (4 + 3t) + 8 = 0 ==> t bel. ==> $g \subset E_3$

43. z.B. P_1(0|1|6) ∈ g und P_2(-1|0|3) ∈ g (P_3(-2|-1|0) ∈ g)
==> g: $\vec{r} = \overrightarrow{OP_1} + t\cdot\overrightarrow{P_1P_2}$ = (0|1|6) + t(-1|-1|-3)

44. a) $(-2 + 3t) + 2(-1 + t) - 5(2 - 2t) + 9 = 0$; $t = 1$ ==> $D(1|0|2)$

b) $X(-9|0|0)$, $Y(o|-4{,}5|0)$, $Z(0|0|9/5)$

c) E: $\vec{r} = \vec{OX} + u\vec{XY} + v\vec{XZ} = (-9|0|0) + u(9|-4{,}5|0) + v(9|0|9/5)$

E: $\vec{r} = (-9|o|o) + u(2|-1|0) + v(5|0|1)$

45. a) **$z = 0$** b) **$x = 1$** c) **$x = y$**

46. a) $y = 3$ b) $x = z$ c) $y = 0$

47. z.B. E_1: $2x - y + 7z - 32 = 0$

drei Punkte auf E_2: $A(7|-4|2)$, $B(6|1|3)$, $C(4|-3|3)$ liegen alle auf E_1

==> $E_1 = E_2$

48. a) $X(6|0|0)$, $Y(0|-2|0)$, $Z(0|0|6)$

b) s_2: $-3y + z - 6 = 0$

c) E: $\vec{r} = \overline{OX} + u \cdot \overline{XY} + v \cdot \overline{XZ} = (6|0|0) + u \cdot (-6|-2|0) + v \cdot (-6|0|6)$

49. E: $\vec{r} = (6|0|0) + u(1|1|0) + v(1|0|2)$ ==> E: $2x - 2y - z - 12 = 0$

==> s_3: $2y + z + 12 = 0$

(oder: Achsenschnitte: $X(6|0|0)$, $Y(0|-6|0)$, $Z(0|0|-12)$

==> s_3: $\vec{r} = \overline{OY} + t \cdot \overline{YZ} = (0|-6|0) + t(0|6|-12)$)

50. E_3: $\vec{r} = \overline{OA} + u\overline{AB} + v\overline{AC} = (0|1|-3) + u(1|1|4) + v(1|2|2)$

==> E_3: $6x - 2y - z - 1 = 0$

$E_1 \cap E_2 \cap E_3$ ==> $S(2|3|5)$

51. E: $\vec{r} = \overline{OA} + u \cdot \overline{AB} + v \cdot \overline{AC} = (2|2|4) + u(4|11|0) + v(-1|1|3)$

==> E: $11x - 4y + 5z - 34 = 0$

52. a) E_2: $x + y - z + 1 = 0$; $z = t$ geht nicht; $x = t$ ==> g: $\vec{r} = (0|0|1) + t \cdot (1|-1|0)$

oder $P_1(0|0|1)$, $P_2(1|-1|1)$, $P_3(-1|1|1)$...$\in g$...

oder $e \subset E_2$: $(0|1|2) + u(1|-2|-1) \cap E_1$ ==> $P(1|-1|1)$

$f \subset E_2$: $(0|1|2) + v(-2|3|1) \cap E_1$ ==> $Q(2|-2|1)$ ......

b) E_3: $\vec{r} = (1|0|0) + u(1|-2|-1) + v(-2|3|1)$

53. z.B. X(4|0|0), Y(0|3|0);

E: $\vec{r} = \overrightarrow{OX} + u\cdot\overrightarrow{XY} + v\cdot\overrightarrow{XP} = (4|0|0) + u(-4|3|0) + v(-3|1,5|1)$

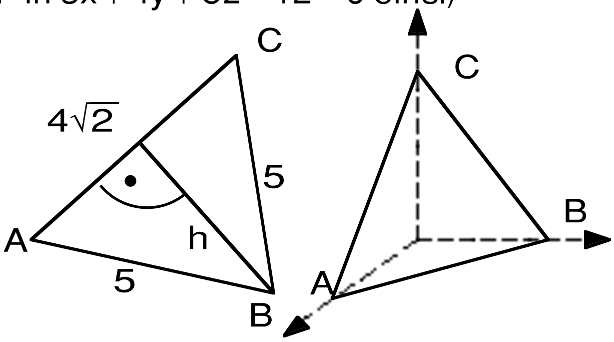
==> E: $3x + 4y + 3z - 12 = 0$ (oder P in $3x + 4y + Cz - 12 = 0$ eins.)

b)

A(4|0|0), B(0|3|0), C(0|0|4), D = O

$G = 0,5\cdot 4\cdot 3 = 6$, h(tet) = 4

$V = 1/3 \cdot G \cdot h(Tet) = 8$



$h = \sqrt{17}$

$F(ABC) = 0.5\cdot 4\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{17} = 2\cdot\sqrt{34}$

$O = 0,5\cdot 4\cdot 4 + 2\cdot 0,5\cdot 4\cdot 3 + F(ABC)$

$O = 20 + 2\sqrt{34} = 31,66$

54. a) x−Aa = 1/A, y−Aa = 1/B, z−Aa = 1/C

b) E: $x - 1/3\cdot y + 4z = 1$ ==> E: $3x - y + 12z - 3 = 0$

55. a) $\overline{OE} = 15/3 = 5$; $\overline{PE} = (1-4+6+15)/3 = 6$

b) $\vec{n}_1 = (1|-2|2)$; $\vec{n}_2 = \vec{a}_1 x \vec{b}_1 = (-1|3|1)x(0|1|2) = (5|2|-1)$

oder: E_2: $5x + 2y - z - 9 = 0$ ==> $\vec{n}_2$; $\cos\alpha = |5-4-2|/3\cdot\sqrt{30}$ ==> $\alpha = 86.5°$

c) $\vec{a} = \overrightarrow{OP} = (1|2|3)$ ==> $\sin\alpha = |1-4+6|/3\cdot\sqrt{14}$ ==> $\alpha = 15.5°$

56. M(−2|3|1) $\overrightarrow{AB} = (-6|2|-4)$ ....=> E: $3x - y + 2z + 7 = 0$

57. $-12 -5u -28 = 0 \Rightarrow u = -8$

58. P(0|0|z); $\overrightarrow{PA} = (3|-4|6-z)$; $\overrightarrow{PB} = (8|8|8-z)$

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} = 24 - 32 + 48 - 14z + z^2 = 0 \Rightarrow z^2 - 14z + 40 = 0 \Rightarrow z_1 = 4, z_2 = 10$

=> **P_1(0|0|4), P_2(0|0|10)**

59. G(−1 | 1 + t | t), H(2 + 2s | 1 | 3 − s); GH = (3 + 2s | −t | 3 − s − t)

$GH\cdot v_g = 0 \Rightarrow -t + 3 - s - t = 0 \Rightarrow -s - 2t + 3 = 0$

$GH\cdot v_h = 0 \Rightarrow 6 + 4s - 3 + s + t = 0 \Rightarrow 5s + t + 3 = 0$

=> s = −1, t = 2 => G(−1 | 3 | 2), H(0 | 1 | 4), d = GH = 3

60. $\vec{c} = (-25 | 1 | -20)$;

$(-25 | 1 | -20)\cdot(-3 | 5 | 4) = 0 = (-25 | 1 | -20)\cdot(4 | 0 | -5)$

61. z.B. $x = 0$ und $E \cap F$: $-4y + z = 0$ und $-2y + 3z = 10$ => $-5z = -20$ => P(0|1|4)
z.B. $y = 0$ und $E \cap F$: $3x + z = 0$ und $5x + 3z = 10$ => $-4x = 10$ => Q(−2.5|0|7.5)
=> $\vec{a}$ = (−2.5 | −1 | 3.5) => **g: $\vec{r}$ = (0 | 1 | 4) + t·(−5 | −2 | 7)**
oder $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ = (−10 | −4 | 14), P wie oben etc.

$\cos\alpha$ =](3] -4] 1) · (5] -2] 3)] / (√26 · √38) => **α = 34.19°**

62. a) $\vec{n}(F) = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ = (3 | -5 | 1) x (2 | -4 | 1) = (−1 | −1 | -2) ≈ (1 | 1 | 2)
F: x + y + 2z + D = 0; P ∈ E ==> D = −1 ==> **F: x + y + 2z − 1 = 0**

b) g ∥ $\vec{n}(F)$ ==> g: $\vec{r} = \overrightarrow{OP} + t\cdot\vec{n}(F)$ ==> **g: $\vec{r}$ = (5 | 2 | −3) + t·(1 | 1 | 2)**
a =](1] 1] 2) x (-3] 1] 2)] / √6 =](0] -8] 4)] /√6 = **2√30/3 = 3.651**

63. d = $|\overline{BC} \times \overline{BA}| / \overline{BC}$ = | (3 | 2 | -2) x (−1 | 1 | 8) | / $\sqrt{17}$ = |(18 | -22 | 5) | / $\sqrt{17}$ =
$\sqrt{833/17} = \sqrt{49} = 7$

64. a) 7.5 b) 50

65. a) A(4|0|2), B(2|2|4), C(0|4|1); $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ = (-2|2|2)x(−4|4|−1) = (−10|−10|0)
=> FΔ = $0.5\cdot\sqrt{200} = 5\sqrt{2}$
b) P(4|y|0); $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}$ = (-2|2|2)x(0|y|-2) = (−10|−10|0) = (−4 − 2y | −4 | -2y)
=> $(2\cdot2\cdot\sqrt{6})^2 = 96 = (-4 - 2y)^2 + (-4)^2 + (-2y)^2 = 8y^2 + 16y + 32$
=> $y^2 + 2y - 8 = (y + 4)(y - 2) = 0$ => y = 2 => P(4|2|0)

66. a) $\overrightarrow{AB}$ = (4|-6|-8), $\overrightarrow{DC}$ = (2|-3|-4) = 2·$\overrightarrow{AB}$ => AB ∥ DC => Trapez.
b) M_b(7 | -11/2 | -7), M_d(4 | -1 | -1)
F = F(ABC) + F(ACD) = $0.5|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| + 0.5|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}|$
= 0.5[|(4|-6|-8) x (-4|-9|4)| + |(-4|-9|4) x (-6|-6|8)|]
= 0.5[|(−96|16|-60| + |(−48|8|-30)|]
= 0.5[114.333 + 57.166] = 85.75

67. $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ = (-8|7|-6) x (-12|9|-9) = (−9|0|12) , |...| = 15 => $\vec{h}$ = ±(−6|0|8) = $\overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{OD}_{12} = \overrightarrow{OA} \pm \overrightarrow{AD}$ => **D_1(2 | −2 | 11) , D_2(14 | −2 | −5)**
V = 1/3 · G·h = 1/3 · 1/2 ·| $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$|·10 = 1/3 · 1/2 ·15·10 = **25**
cos α = $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} / (\overline{AB} \cdot \overline{AC})$ = (−8|7|−6) · (−12|9|−9)/ (√149 · 3√34) = (96 + 63 + 54)/...
= 213/ ... = 0.99753 => **α = 4.028°**

68. **f: $\vec{r}$ = (1 | 0 | 3) + t·(1 | 0 | −1)**

69. a) $\cos\alpha = |(1|-2|3)\cdot(0|0|1)|/\sqrt{14} = 3/\sqrt{14}$ => $\boldsymbol{\alpha = 36.70°}$

$\sin\beta = |(1|-2|3)\cdot(2|3|6)|/\sqrt{14}\cdot 7 = 14/\sqrt{14}\cdot 7 = 2/\sqrt{14}$ => $\boldsymbol{\beta = 32.31°}$

E_2: $\vec{r} = \overrightarrow{OA} + u\cdot\overrightarrow{AB} + v\cdot\overrightarrow{AC} = (4|-6|-3) + u\cdot(-4|4|4) + v\cdot(-9|3|-9)$

=> $x = 4 - 4u - 9v$ und $y = -6 + 4u + 3v$ und $z = -3 + 4u - 9v$

$x + y = -2 - 6v$ und $x + z = 1 - 18v$ => $3x + 3y - x - z = 5$

=> **E_2: $\mathbf{2x + 3y - z + 7 = 0}$**

$E_1 \cap E_2$: $z = 0$ => $x - 2y - 7 = 0$ und $2x + 3y + 7 = 0$ => $-7y - 21 = 0$

=> $S_1(1|-3|0)$; $x = 0$ => $-2y + 3z - 7 = 0$ und $3y - z + 7 = 0$ => $7y + 14 = 0$

=> $S_2(0|-2|1)$, ebenso $S_3(-2|0|3)$

=> **s: $\vec{r}$ =** $\overrightarrow{OS_1} + t\cdot\overrightarrow{S_1S_2}$ = **$(1 | -3 | 0) + t\cdot(-1 | 1 | 1)$**

oder: $\vec{n}_1 x \vec{n}_2 = (1 | -2 | 3) \times (2 | 3 | -1) = (-7 | 7 | 7) \pm(-1 | 1 | 1)$, s_1 wie oben etc

b) $g \cap E_1$: $(1 + 2t) - 2(6 + 3t) + 3(6 + 6t) - 7 = 0$ => $14t = 0$ => $D(1|6|6)$

$P(3|9|12) \in g$ => l: $\overrightarrow{OP} + t\cdot\vec{n}_{E_1} = (3|9|12) + t\cdot(1|-2|3)$

$l \cap E_1$: $(3 + t) - 2(9 - 2t) + 3(12 + 3t) - 7 = 0$ => $14t + 14 = 0$ => $t = -1$

=> $F(2|11|9)$ => $\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{PF} = (2|11|9) + (-1|2|-3)$ => $P^*(1|13|6)$

=> **g*: $\vec{r}$** = $\overrightarrow{OD} + t\cdot\overrightarrow{P^*D}$ = **$(1|6|6) + t(0|1|0)$**

(oder mit $t = -1$: $P(-1|3|0) \in g$ => $F(0|1|3)$ etc.)

c) W_{12}: $= (x - 2y + 3z - 7)/\sqrt{14} = \pm(2x + 3y - z + 7)/\sqrt{14}$

=> **W_1: $\mathbf{x + 5y - 4z + 14 = 0}$; W_2: $\mathbf{3x + y + 2z = 0}$**

$g \cap W_1$: $(1 + 2t) + 5(6 + 3t) - 4(6 + 6t) + 14 = 0$

=> $7t = 21$ => $t = 3$ => **$P_1(7|15|24)$**

$\mathbf{P_1E_{12}} = |7 - 30 + 72 - 7|/\sqrt{14} = 42/\sqrt{14} = \mathbf{3\cdot\sqrt{14} = 11.22}$

$g \cap W_2$: $3(1 + 2t) + (6 + 3t) + 2(6 + 6t) = 0$

=> $21t = -21$ => $t = -1$ => **$P_2(-1|3|0)$**

$\overline{\mathbf{P_2E_{12}}} = |-1 - 6 + 0 - 7|/\sqrt{14} = 14/\sqrt{14} = \mathbf{\sqrt{14} = 3.742}$

70. a) $\vec{n}_1=(10|-11|2)$; $\vec{n}_2 = (0|4|-3)$; $\cos\alpha = |-44 - 6|/15\cdot5 = 2/3 \implies \alpha = 48.2°$

b) $\vec{a} = (-2|3|1)$; $\sin\beta = |-20 - 32 + 2|/15\cdot\sqrt{14} = 51/15\cdot\sqrt{14} \implies \beta = 65.3°$

c) $a = |-8/5| = 1{,}6$;

d) $d = |(10 + 11 - 10 - 11)/...)| = 0$

e) E_3: $10x - 11y + 2z + D = 0$; $Q \in E_3 \implies D = -1$

$\implies E_3$: $10x - 11y +2z -1 = 0$

f) W_1: $10x - 23y + 11z + 13 = 0$;

$\cap\, g$: $10(5-2t) - 23(-5+3t) + 11(-2+t) + 13 = 0$

$t = 2 \implies S_1(1|1|0)$; $(d = 3/5)$

W_2: $10x + y - 7z - 35 = 0$; $\cap\, g$: $\implies t = 1$; $\implies S_2(3|-2|-1)$; $(d = 13/5)$

g) Lot l durch S auf E_1; l: $\vec{r} = (5|-5|-2) + t(10|-11|2)$

$l \cap E_1$: $\implies t = -2/5$;

$\implies S'(-3|3{,}8|-3{,}6) = S'(-3|19/5|-18/5)$ $(F(1|-0{,}6|-2{,}8))$

71. a: $3x + 4y + 4 = 0$; $h_a = |0.2(3(-5) + 4(-6) + 4)| = 7$

b) $\cos\beta = |(-1|-8)\cdot(4|-3)/(\sqrt{65}\cdot\sqrt{25})| = 4/\sqrt{65} \implies \beta = 60.26°$

c) b: $x - y - 1 = 0$; w_{12}: $0.5(3x + 4y + 4) = \pm1/\sqrt{2}\cdot(x - y - 1)$

w_1: $(5-3\sqrt{2})x - (5+4\sqrt{2})y - (5+4\sqrt{2}) = 0 \implies m_1 = (5-3\sqrt{2})/(5+4\sqrt{2}) = 0.07108$

Skizze $\implies w_1 = w_\gamma : y = (5\sqrt{2} - 7)x - 1 = 0.0718x - 1$

d) $M_b(-2.5|-3.5)$; $m_{mb} = -1 = (y + 3.5)/(x + 2.5) \implies m_b$: $x + y + 6 = 0$

c: $8x - y + 34 = 0$; $m_b \cap c$: $S(-40/9 \mid -14/9) = S(-4.444 \mid -1.556)$

vektoriell: $\vec{n}_b = (1 \mid -1)$ m_b: $\vec{r} = (-2.5 \mid -3.2) + t\cdot(1 \mid -1)$; c: $\vec{r} = (-5 \mid -6) + t\cdot(1 \mid 8)$

$m_b \cap c \implies t = -35/18$ etc.

72. a) $\vec{a}\cdot(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\cdot(3|5|7) = 3 - 7 = -4$; $\vec{a}\cdot\vec{b} * \vec{a}\cdot\vec{c} = (3 - 2) + (-5) = -4$ q.e.d.

b) $\cos\alpha = (-5)/(\sqrt{2}\cdot\sqrt{29}) \implies \alpha = 133.9°$

c) $\vec{v} \parallel \pi_1 \implies z = 0$, $\perp \vec{b} \implies \vec{v}\cdot\vec{b} = 0 \implies 3x + 4y = 0 \implies$ z.B. $\vec{v} = (4|-3|0)$

d) $E \perp \vec{a}$: $x - z + D = 0$; $P \in E \implies 1 - 3 * D = 0 \implies D = 2 \implies E$: $x - z + 2 = 0$

73. E: $\vec{r} = \overrightarrow{OP} + u\cdot\vec{n}_1 + \vec{v}\cdot\vec{n}_2 = (1|0|3) + u(3|2|-1) + v(1|1|1)$

u,v eliminieren $\implies$ E: $3x - 4y + z - 6 = 0$

$(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{n} = (3 \mid -4 \mid 1) \implies$ E: $3x - 4y + z + d = 0$; $P\in E \implies d = -6)$

74. $\overrightarrow{OP}' = \overrightarrow{OR} + \overline{PR}/\overline{QR}\cdot\overrightarrow{QR} = (5|1|4) + \sqrt{342/152}\cdot(2|-12|2) =$

$(5|1|4) + 3/2\cdot(2|-12|2) = (8 \mid -17 \mid 7)$;

$\implies \vec{n} = \overrightarrow{P'P} = (-6|-24|18) \approx (1 \mid 4 \mid -3) \implies$ E: $x + 4y - 3z + D = 0$

$R \in E \implies 5 + 4\cdot1 - 3\cdot4 + D = 0 \implies D = 3$

$\implies$ E: $x + 4y - 3z + 3 = 0$

75. E: $\vec{r} = \overrightarrow{OP} + u \cdot \overrightarrow{PQ} + v \cdot \vec{n}(F)$ => x = 1 + 2u + 4v; y = 3 -u + 3v, z = u
==> E: 3x - 4y - 10z + 9 = 0

76. Lot l zu E durch P(-1|-1|1) . l: $\vec{r}$ = (-1|-1|1) + t*(1|-3|-2)
l n E :(-1+t)-3(-1-3t)-2(1-2t)+42=0 ==> 14t = -42 ==> t = -3 ==> F(-4|8|7)
P´: $\overrightarrow{OP}$ - 6(1|-3|-2) ==> P´(-7|17|13)
g n E : (-1-3t)-3(-1+4t)-2(1+3t)+42=0 ==> t = 2 ==> S(-7|7|7)
==> g´ = (P´S): $\vec{r}$ = (-7|7|7) + t(0|5|3)

77. a) E: x + y + z - 6 = 0; s: $\vec{r}$ = (6|6|0) + t·(-6|-6|3)
s ∩ E: (6-6t) + (6-6t) + (0+3t) - 6 = 0 => t = 2/3 => R(2|2|2)
Lot von D auf E: $\vec{r}$ = (6|6|0) + t·(1|1|1) ∩ E => 12 + 3t -6 = 0 => t = -2
=> D´(2|2|-4) => s´: $\vec{r} = \overrightarrow{OR} + t \cdot \overrightarrow{D'R}$ = (2|2|2) + t(0|0|6)
b) im Deckel: S(2|2|6)

78. A(2 | 2 | 1) ∈ F, $\overrightarrow{AP}$ = (-1 | 3 | -3) ∥ F;
=> F: $\vec{r}$ = (2 | 2 | 1) + u(5 | -1 | 2) + v(-1 | 3 | -3)
=> F: 3x - 13y -14z + 34 = 0; $\vec{n}_F$ = (3 | -13 | -14)
cosφ = |(3 | -2 | 5)·(3 | -13 | -14) / ($\sqrt{38} \cdot \sqrt{374}$) | = 35 / ($\sqrt{38} \cdot \sqrt{374}$)
=> φ = 72.93°

79. sinφ = (3 | -4 | 0) · (2 | 1 | -2) / (5·3) | = 2/15 => φ = 7.662°

80. F: 4x - 4y - 7z + D = 0; P ∈ F => 12 + 16 - 7 + D = 0 => D = -21
=> F: 4x - 4y - 7z - 21 = 0; $\overline{PE}$ = (12 + 16 - 7 + 6)/9 = 3

81. HNF(E): (11x - 2y + 10z - 15)/15 = 0 => d(OE) = |-1| => d_1=2, d_2 = -4
=> E_1: 11x - 2y + 10z + 30 = 0; E_2: 11x - 2y + 10z - 60 = 0

82. W_{12} = (14x - 7y - 22z + 38)/27 = ±(4x +7y - 4z + 2)/9
W_1: x - 14y - 5z + 16 = 0; W_2: 13x + 7y - 17z + 22 = 0
g: $\vec{R}$ = (6 | 3 | 2) + t·(3 | 2 | -2); g ∩ W_1: 6 + 3t - 14(3 + 2t) -5(2 - 2t) + 16 = 0 ==> -15t - 30 = 0 ==> t = -2 ==> **P_1(0|-1|6)**
g ∩ W_2: 13(6 + 3t) + 7(3 + 2t) - 17(2 - 2t) + 22 = 0 ==> 87t + 87 = 0
==> t = -1 ==> **P_2(3|1|4)**

83. a) W_{12}: 1/9·(6x + 6y − 3z + 2) = ±1/3·(x − 2y + 2z − 4

W_1: 3x + 12y − 9z + 14 = 0; ==> P_1(0 | 0 |14/9)

W_2: 9x + 3z − 10 = 0 ==> P_2(0 | 0 | 10/3)

b) $\overline{P_1E}$ = |1/9·(−3·14/9 + 2)| = 8/27 = 0.296;

$\overline{P_2E}$ = |1/9·(−3·10/3 + 2) | = 8/9 = 0.889

==> P_1 liegt näher bei E

84. B(2|−6|2); l = (AF): $\vec{r} = \overrightarrow{OA} + t\cdot\vec{n}$ = (−2|−4|6) + t·(4|−3|−1)

l ∩ E: 4(−2+4t) −3(−4−3t) −(6−t) −24 = 0: t = 1; F(2|−7|5); A´(6|−10|4)

g´: $\vec{r} = \overrightarrow{OA'} + t\cdot\overrightarrow{A'B}$ = (6|−10|4) + t·(−4|4|−2) ≈≈>(6|−10|4) + t·(2|−2|1)

g´∩ xy-Ebene: z = 0 = 4 + t => t = −4 => S(−2|−2|0)

85. M(1|3|4); $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$ = (4|2|6) ≈ (2|1|3)

Mittelnormalebene: E: 2x + y + 3z + D = 0; M ∈ E: 2 + 3 + 12 + D = 0; D = −17

g ∩ E: 2(3 + t) + (−2 − t) + 3(2 + 2t) − 17 = 0 => t = 1 => **P(4|−3|4)**

oder:P ∈ g : $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ => $(3+t+1)^2 + (-2-t-2)^2 + (2+2t-1)^2$

= $(3+t-3)^2 + (-2-t-4)^2 + (2+2t-7)^2$=> 33 + 8t = 61 − 20t => t = 1; => P(4|−3|4)

86. P ∈ t: (y − 14)/(x − 2) = m

=> t: mx − y − 2m + 14 = 0

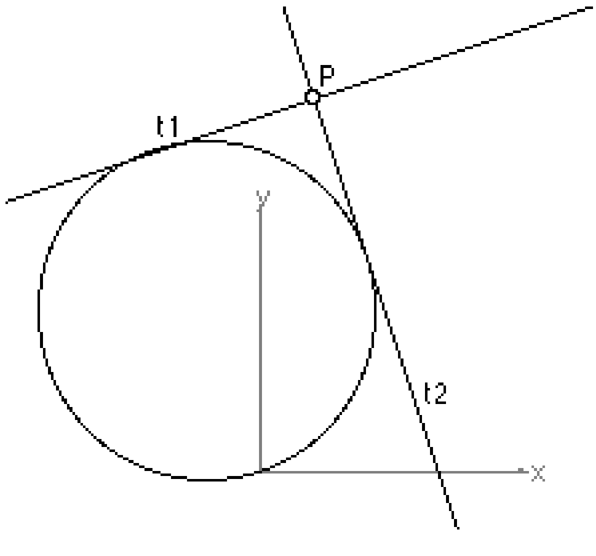
$\overline{Mt} = \sqrt{40} = \pm(-2m-6-2m+14)/\sqrt{m^2+1}$

$= \pm(-4m + 8)/\sqrt{m^2+1}$

=>$3m^2 + 8m - 3 = 0$ => $m_1 = 1/3$, $m_2 = -3$

=> **t_1: x − 3y + 40 = 0**

t_2: 3x + y − 20 = 0



oder mit $B_0(x_0 \mid y_0)$:

t: $(x+2)(x_0+2) + ((y-6)(y_0-6) = 40$

P ∈ t => $x_0 = 20 - 2y_0$ und B ∈ k

=> $(x_0+2)^2 + (y_0-6)^2 = 40$

I in II ==> $y_0^2 - 20y_0 + 96 = 0$ => $y_{01} = 12$, $y_{02} = 8$)=> B_1(−4 | 12), B_2(4 | 8) ....

87. k: $(x-u)^2 + (y + u - 10)^2 = 25$

A∈K: $(-1-u)^2 + (u-4)^2 = 25$ => $u^2 - 3u - 4 = (u + 1)(u - 4) = 0$; $u_1 = -1$; $u_2 = 4$

=> M_1(−1|11); M_2(4|6)

k_1: $(x + 1)^2 + (y - 11)^2 = 25$; k_2: $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 25$

k_1: $x^2 + y^2 + 2x - 22y + 97 = 0$; k_2: $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 27 = 0$

88. Berühren ==> $\pm \overline{Mg} = \pm r = (4\cdot3 - 3\cdot5 + 10)/5 = 7/5$ ==> $r = 7/5$
==> **K: $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 49/25$**

89. $M_{AB}(-1|5)$, $m_{AB} = -2/3$ => s: $y = 3/2\cdot x + 13/2$;
$s \cap k$: $x^2 + 10x + 21 = 0$ ==> $S_1(-3|2)$, $S_2(-7|-4)$

90. $P_1(7|-8)$; Sekante s: $y = -12/5\cdot x + 44/5$, $P_2(-3|16)$, $P_1P_2 = 26$

91. a) $P(-2|3)$, $M(6|9)$ => $m(PM) = 3/4$ ==> $m(s) = -4/3 = (y - 3)/(x + 2)$
==> g: $y = -4/3\cdot x + 1/3$ oder g: $4x + 3y - 1 = 0$
b) $K \cap s$: $(x - 6)^2 + (-4/3\cdot x - 26/3)^2 = 200$ ==>
$x^2 + 4x - 32 = (x + 8)(x - 4) = 0$ ==> $P_1(-8 \mid 11)$, $P_2(4 \mid -5)$, $\overline{P_1P_2} = 20$
einfacher mit Pythagoras: $(s/2)^2 = r^2 - \overline{PM}^2 = 200 - 100 = 10^2$

92. t: $(x - 2)(-5) + (y + 3)\cdot 12 = 169$ => **$5x - 12y + 123 = 0$** ; $y = 5/12\cdot x + 41/4$

93. Zentrale $\perp$ Tangenten: s: $y = 3/4\cdot x - 15/4$ $s \cap k$: $S_1(5|0)$, $S_2(-3|-6)$
t_1: $y = -4/3\cdot x + 20/3$ t_2: $y = -4/3\cdot x - 10$
oder: $M(1|-3)$, $r = 5$; Lot l zu g durch M: $\vec{r} = (1|-3) + t(4|3)$
$l \cap k$: $(4t)^2 + (3t)^2 = 25$ ==> $t = \pm 1$ ==> $S_1(5|o)$, $S_2(-3|-6)$
$t \perp l$: $4x + 3y + D = 0$; ==> t_1: $4x + 3y - 20 = 0$; t_2: $4x + 3y + 30 = 0$

94. a) Berührpunkt: $B(x_0|y_0)$ ==> t: $x_0x + y_0y = 10$
$P \in t$: $-4x_0 + 2y_0 = 10$; $B \in t$: $x_0^2 + y_0^2 = 10$; I: $y_0 = 5 + 2x_0$ in II
==> $x_0^2 + 4x_0 + 3 = (x_0 + 3)(x_0 + 1) = 0$
==> $B_1(-3 \mid -1)$; t_1: $3x + y + 10 = 0$; $B_2(-1 \mid 3)$; t_2: $x - 3y + 10 = 0$
b) $m_1 \cdot m_2 = (-3) \cdot 1/3 = -1$
oder: t: $m = (y - 2)/(x + 4)$ ==> $y = mx + 4m + 2$
==> $\pm\sqrt{10} = \pm \overline{Mt} = \pm \overline{Ot} = (2 + 4m)/\sqrt{m^2 + 1}$ ==> $3m^2 + 8m - 3 = 0$
==> $m_1 = 1/3$; $m_2 = -3$ etc.
oder: Diskriminantenmethode: $K \cap t$ hat nur 1 Lösg.

95. I: $u^2 + (12-v)^2 = r^2$ II: $(-4-u)^2 + v^2 = r^2$ III: $u^2 + v^2 = r^2$; III in I und II
==> $M(-2|6)$; $r^2 = 40$; $P \in t$: $(y - 14)/(x - 2) = m$ => t: $mx - y - 2m + 14 = 0$
$\overline{Mt} = \sqrt{40} = \pm(-2m-6-2m+14)/\sqrt{m^2 + 1} = \pm(-4m + 8)/\sqrt{m^2 + 1}$
=>$3m^2 + 8m - 3 = 0$ => $m_1 = 1/3$, $m_2 = -3$
=> t_1: $x - 3y + 40 = 0$ t_2: $3x + y - 20 = 0$

96. $M_0(7|14)$, $r_0=5$; ges. $M(u|v)$, r
I: $u = v = +r$; II: $\overline{MM_0} = r - 5 \Rightarrow (7 - r)^2 + (14 - r)^2 = (r - 5)^2$
$\Rightarrow r^2 - 32r + 220 = 0$
$M_1(22|22)$, $r_1 = 22$; $M_2(10|10)$, $r_2 = 10$

97. k_1: $(x-13)^2 + (y-3)^2 = 5^2$; $M_1(13|3)$: k_2: $(x+4)^2 + (y+3)^2 = 10^2$; $M_2(-4|-3)$
ges: $k(M(u|v)|R)$; I: $u = R$; II: $\overline{M_1M} = 5+u$; III: $\overline{M_2M} = 10+u$
$\Longrightarrow (13-u)^2 + (3-v)^2 = (5+u)^2$ und $(-4-u)^2 + (-3-v)^2 = (10+u)^2$
$\Longrightarrow -36u + v^2 - 6v + 153 = 0$ und $-12u + v^2 + 6v - 75 = 0 \,|\cdot(-3)$
$\Longrightarrow -2v^2 - 24v + 378 = 0$; $v^2 + 12v - 189 = 0$; $v_1 = 9$; $v_2 = -21$
$\Longrightarrow u_1 = R_1 = 5$; $u_2 = R_2 = 20$ $\Longrightarrow$ **k: M(5|9), R = 5; k´: M(20|-21), R = 20**

98. a) $k_1 \cap g$: $(x - 4)^2 + (2x - 5)^2 = 9 \Longrightarrow 5x^2 - 28x + 32 = 0 \Longrightarrow x_1 = 4$; $x_2 = 8/5 = 1.6$
$\Longrightarrow S_1(4|4)$; $S_2(1.6|-0.8) = S_2(8/5 \,|\, -4/5)$

b) k: $(x-u)^2+(y-v)^2 = r^2$; k ber. x-Achse von oben $\Longrightarrow r = v$;
k ber. $k_1 \Longrightarrow \overline{MM_1} = v+3$ (I) $\qquad$ $p \in k \Longrightarrow$ (II)
I: $(u-4)^2+(v-1)^2 = (v+3)^2$; $\qquad$ II: $(3-u)^2+(7-v)^2 = v^2$
$u^2 - 8u - 8v + 8 = 0$; $\qquad$ $u^2 - 6u - 14v + 58 = 0$
7·I: $7u^2 - 56u - 56v + 56 = 0$; $\qquad$ 4·II: $4u^2 - 24u - 56v + 232 = 0$
7·I – 4·II: $3u^2 - 32u - 176 = 0$; $u_{12} = 1/6\cdot(32 \pm 56)$; $u_1 = 44/3$; $u_2 = -4$
(I $\Longrightarrow v = u^2/8 - u + 1$)
$\Longrightarrow M_1(44/3|119/9) = M_1(14.7|13.2)$, $r_1 = 119/9 = 13.2$;
$M_2(-4|7)$, $r_2 = 7$

99. Ges: $M(u|v)$, r. x-Achse berühren $\Longrightarrow v = \pm r$
Skizze: K ber. K_1 und K_2 von aussen $\Longrightarrow \overline{MM_1} = r + 1$; $\overline{MM_2} = r + 9$
$\Longrightarrow (u + 4)^2 + v^2 = (1 \pm v)^2$; $(u - 4)^2 + (v + 8)^2 = (9 \pm v)^2$
(+) $\Longrightarrow u^2 + 8u - 2v + 15 = 0$; $u^2 - 8u - 2v - 1 = 0$
$\Longrightarrow u = -1$; $v = r = 4$; K: $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 16$ $M(-1 \,|\, 4)$, $r = 4$
(-) $\Longrightarrow u^2 + 8u + 2v + 15 = 0$; $u^2 - 8u + 34v - 1 = 0$
$\Longrightarrow u^2 + 9u + 16 = 0 \Longrightarrow u_{12} = (-9 \pm \sqrt{17})/2 \Longrightarrow v_{12} = (-7 \pm \sqrt{17})/4 = -r_{12}$
$\Longrightarrow$ K´: $(x + 2.44)^2 + (y + 0.719)^2 = 0.719^2 = 0.517$
$M(-2.44 \,|\, -0.719)$ $R = 0.719$
K": $(x + 6.56)^2 + (y + 2.78)^2 = 2.78^2 = 7.73$
$M(-6.56 \,|\, -2.78)$ $r = 2.78$

100. a) $M(2|-5)$; $r = 4$ $\qquad$ b) $M(-17|-4)$; $r = 1$ $\qquad$ c) $M(-2/3 \,|-1/2)$; $r = 5/6$

101. a) $P(0 \mid -5)$; $Q(4 \mid 3)$ b) $P(16 \mid -8)$; $Q(0 \mid -16)$ c) Berührpunkt: $P(5|-1)$

102. $M_1(5|-5)$; $r_1 = 5$; $M_2(1|-1)$, $r_2 = 1$

103. $M_1(-5|2)$, $r_1 = 5$; $M_2(-13|-6)$, $r_2 = 13$

104. $M(2|1)$, $r = \sqrt{20}$

105. a) $A(4|0)$, $B(0|4)$, $C_{12}(-3|\pm\sqrt{7}) = C_{12}(-3|2{,}65)$
b) $A(0|-2)$, $B(2+2\sqrt{2}=4{,}83|-2)$, $C(1+\sqrt{13}|1+\sqrt{13}) = C(4{,}61|4{,}61)$, $D(\sqrt{2}|\sqrt{2})$

106. a) $M(4|-3)$; $r = 6$
b) $k: (x - 11)^2 + (y + 10)^2 = 9 \implies k: x^2 + y^2 - 22x + 20y + 212 = 0$

107. a) $(x - 2)^2 + (2x - 9)^2 = 25 \implies 5x^2 - 40x + 60 = 0 \implies (x-2)(x-6) = 0$
$\implies$ **$P_1(2|-8)$; $P_2(6|0)$**
b) $MP_1P_2(4|-4)$; $a = \sqrt{4+1} = \mathbf{\sqrt{5} = 2{,}23}$
c) $MP_1 = MP_2 = 5$; $P_1P_2 = \sqrt{16+64} = 2\cdot\sqrt{20}$; $MP_1P_2\,P_1 = \sqrt{20}$
$\cos\alpha/2 = \sqrt{5}/2$; $\tan\alpha/2 = 2$; $\alpha = 126{,}9°$; $b = 11{,}07$
$U : 100 = b : x$; **$x = 35{,}2$ (%)**

108. $P \in t: (y - 14)/(x - 2) = m \Rightarrow t: mx - y - 2m + 14 = 0$
$\overline{Mt} = \sqrt{40} = \pm(-2m-6-2m+14)/\sqrt{m^2 + 1} = \pm(-4m + 8)/\sqrt{m^2 + 1}$
$\Rightarrow 3m^2 + 8m - 3 = 0 \Rightarrow m_1 = 1/3$, $m_2 = -3$
$\Rightarrow$ **t_1: $x - 3y + 40 = 0$ t_2: $3x + y - 20 = 0$**
oder mit $B_0(x_0 \mid y_0)$: $t: (x+2)(x_0+2) + ((y-6)(y_0-6) = 40$
$P \in t \Rightarrow x_0 = 20 - 2y_0$ und $B \in k \Rightarrow (x_0+2)^2 + (y_0-6)^2 = 40$
I in II $\implies$ $y_0^2 - 20y_0 + 96 = 0 \Rightarrow y_{01} = 12$, $y_{02} = 8$)=> $B_1(-4 \mid 12)$, $B_2(4 \mid 8)$ ....

109. K_a: $(x - 3)^2 + (y - 13)^2 = 25$; K_b: $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 100$

a) t: $y = mx + 21.5$; $M_a(3|13)$, $r_a = 5$

$\Rightarrow \pm 5 = (3m - 13 + 21.5)/\sqrt{m^2 + 1} = (6m + 17)/(2 \cdot \sqrt{m^2 + 1})$

$\Rightarrow 100m^2 + 100 = 36m^2 + 204m + 289 \Rightarrow 64m^2 - 204m - 189 = 0$

$\Rightarrow m_{12} = (204 \pm 300)/128$, $m_1 = 63/16$, $m_2 = -3/4$

$\Rightarrow t_1$: $y = 63/16 \cdot x + 43/2 \Rightarrow$ $\mathbf{63x - 16y + 344 = 0}$

t_2: $y = -3/4 \cdot x + 43/2 \Rightarrow$ $\mathbf{3x + 4y - 86 = 0}$

b) K: $M(u|v)$, r; x-Achse kann nur von oben berührt werden $\Rightarrow v = +r$

b1) K_a und K_b von aussen berühren:

$\overline{M_aM}^2 = (3 - u)^2 + (13 - r)^2 = (5 + r)^2 \quad \Rightarrow u^2 - 6u - 36r + 153 = 0 \quad |\cdot 1$

$\overline{M_bM}^2 = (-3 - u)^2 + (-4 - r)^2 = (10 + r)^2 \quad \Rightarrow u^2 + 6u - 12r - 75 = 0 \quad |\cdot(-1)$

$-u - 2r + 19 = 0 \Rightarrow r = (19 - u)/2$ in (I.) oder: $\mathrm{I} - 3 \cdot \mathrm{II}$

$\Rightarrow u^2 + 12u - 189 = 0 \Rightarrow u_{12} = -6 \pm 15 \Rightarrow u_1 = 9, r_1 = 5; u_2 = -21, r_2 = 20$

$\mathbf{K_1: (x - 9)^2 + (y - 5)^2 = 25}$ **;** $\mathbf{K_2: (x + 21)^2 + (y - 20)^2 = 400}$

b2) K_a umfassend und K_b von aussen berühren:

$\overline{M_aM}^2 = (3 - u)^2 + (13 - r)^2 = (r - 5)^2 \quad \Rightarrow u^2 - 6u - 16r + 153 = 0 \quad |\cdot 1$

$\overline{M_bM}^2 = (-3 - u)^2 + (-4 - r)^2 = (10 + r)^2 \quad \Rightarrow u^2 + 6u - 12r - 75 = 0 \quad |\cdot(-1)$

$-12u - 4r + 228 = 0 \Rightarrow r = -3u + 57$ in (I.) oder: $3 \cdot \mathrm{I} - 4 \cdot \mathrm{II}$

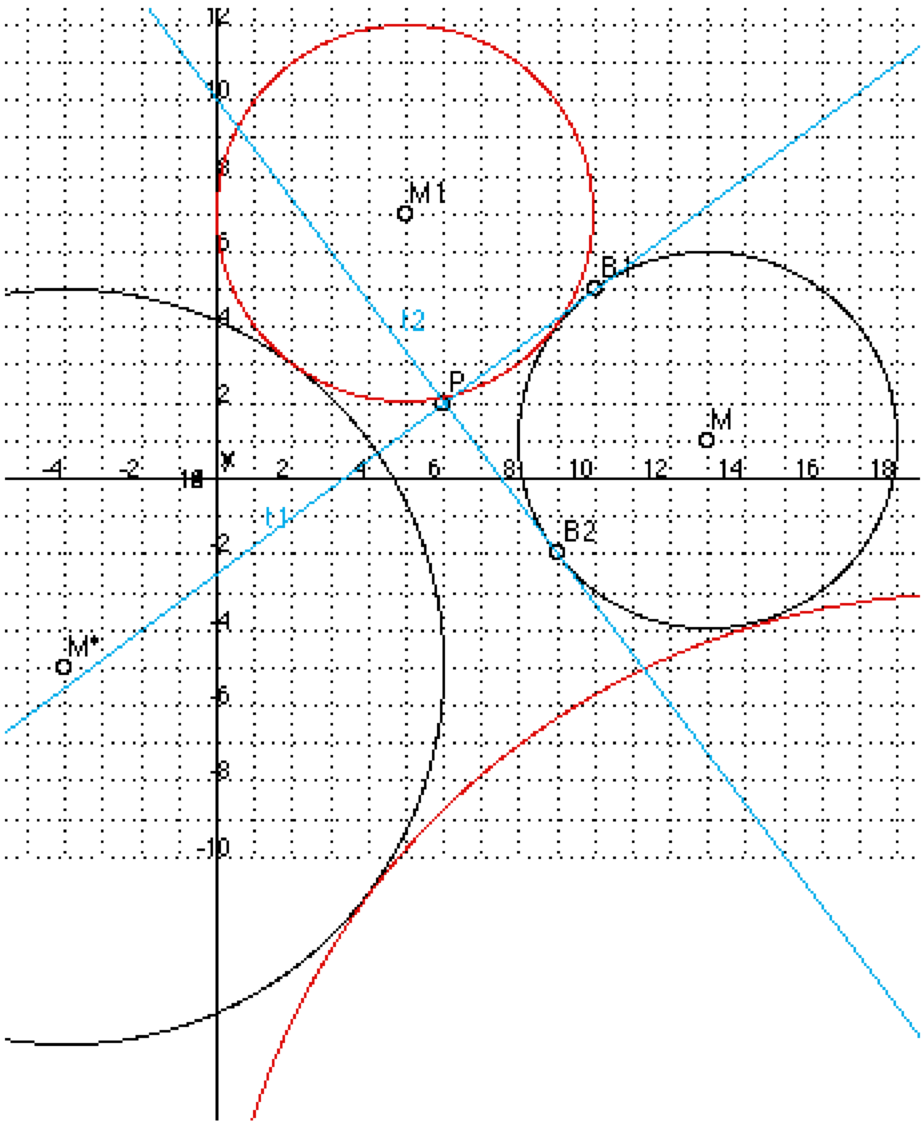
$\Rightarrow u^2 + 42u - 759 = 0 \Rightarrow u_{12} = -21 \pm 20 \cdot \sqrt{3}$

$\Rightarrow u_1 = 13.641, r_1 = 16.077; u_2 = -55.64, r_2 = 223.92$

$\mathbf{K_3: (x - 13.6)^2 + (y - 16.1)^2 = 258.5}$ **;**

$\mathbf{K_2: (x + 55.6)^2 + (y - 223.9)^2 = 50'140.2}$

110.



a) t: $(x - 13)(x_0 - 13) + (y - 1)(y_0 - 1) = 25$; $B(x_0 \mid y_0)$;

$P(6|2) \in t$: $-7\cdot(x_0 - 13) + 1\cdot(y_0 - 1) = 25$

$\Rightarrow y_0 = 7x_0 - 65$

$B \in k_1$: $(x_0 - 13)^2 + ((7x_0 - 65) - 1)^2 = 25$

$\Rightarrow 50x^2 - 950x + 4500 = 0 \Rightarrow x^2 - 19x + 90 = (x - 10)(x - 9) = 0$

$\Rightarrow$ **$B_1(10 \mid 5)$, $B_2(9 \mid -2)$**

t_1: $(x - 13)(-3) + (y - 1)\cdot 4 = 25$ $\Rightarrow$ **t_1: $y = 3/4 \cdot x - 5/2$**

t_1: $(x - 13)(-4) + (y - 1)\cdot(-3) = 25$ $\Rightarrow$ **t_1: $y = -4/3 \cdot x + 10$**

oder: $P \in T \Rightarrow m_t = (y-2)/(x-6) \Rightarrow t: y = mx - 6m + 2$

$\Rightarrow \overline{M_1 t} = 5 = (m\cdot 13 - 1 - 6m + 2)/\sqrt{m^2+1} \Rightarrow 7m + 1 = 5\sqrt{m^2+1}$

$\Rightarrow 12m^2 + 7mm - 12 = 0 \Rightarrow m_{12} = (-7 \pm 25)/24 \Rightarrow 3/4; -4/3$ ...

111. $K \cap g$: $(2t+9)^2 + (2t)^2 + (3t+11)^2 = 49 \Rightarrow t = -3 \Rightarrow B(0 \mid -1 \mid -2)$, nur **1** gem. Pkt.

112. $\overline{ME} = \pm(6-10-6-5)/3 = 5 = r \Rightarrow (x-6)^2 + (y-5)^2 + (z+3)^2 = 25$
$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 10y + 6z + 45 = 0$

113. $\overline{MP}^2 = 9 = (3-(1-t))^2 + (1-(5+2t))^2 + (-2-(-3+t))^2$
$= (2+t)^2 + (-4-2t)^2 + (1-t)^2 \implies 6t^2 + 18t + 12 = 0$
$\implies t^2 + 3t + 2 = (t+1)(t+2) = 0 \implies M_1(2|3|-4); M_2(3|1|-5)$
$\implies K_1$: $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = 9$
K_2: $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 9$
Lotfusspunkt: Mitte von M_1M_2: $F(2.5 \mid 2 \mid -4.5)$
oder: $FP \perp g \implies (3-(1-t) \mid 1-(5+2t) \mid -2-(-3+t))\cdot(-1 \mid 2 \mid 1) = 0 \implies t = -3/2$
$\implies a = \overline{FP} = \sqrt{30}/2 = 2.74$

114. $M(2|0|-6)$; $r'^2 = 16 + 64 + 361 = 441$; $\mathbf{r' = 21}$

115. $P(10 \mid 1 \mid 8)$; $\vec{n}(E) = (8 \mid -19 \mid -4)$; $n = 21 \implies \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} \pm 2\cdot\vec{n}(E)$
$\implies M_1(26 \mid -37 \mid 0)$; K_1: $(x-26)^2 + (y+37)^2 + z^2 = 42^2$
$M_2(-6 \mid 39 \mid 16)$; K_2: $(x+6)^2 + (y-39)^2 + (z-16)^2 = 42^2$

116. K: $(x-4)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 81$; $M(4 \mid 0 \mid -1)$; T_{12}: $2x - 2y + z + D = 0$
$\vec{n}(2 \mid -2 \mid 1)$; Zentrale z: $\vec{r} = \overrightarrow{OM} + t\cdot\vec{n} = (4 \mid 0 \mid -1) + t\cdot(2 \mid -2 \mid 1)$
$z \cap K$: $(2t)^2 + (-2t)^2 + t^2 = 81 \implies t = \pm 3$
$\implies B_1(10 \mid -6 \mid 2)$; $D_1 = -34$; $\mathbf{T_1: 2x - 2y + z - 34 = 0}$
$B_2(-2 \mid 6 \mid -4)$; $D_2 = 20$; $\mathbf{T_2: 2x - 2y + z + 20 = 0}$
einfacher: HNF(T_{12}), M einsetzen$\implies \pm 9 = (8 - 0 - 1 + D)/3$
$\implies D_1 = 20, D_2 = -34$

117. $M_1(0 \mid 0 \mid 2)$, $r_1 = 6$; K_2: $(x-5)^2 + (y-10)^2 + (z-12)^3 = 9^2$; $M_2(5 \mid 10 \mid 12)$, $r_2 = 9$
$\overline{M_1M_2} = 15 = r_1 + r_2 \Rightarrow$ Berühren von aussen.
"$K_1 - K_2$" = T: $10x + 20y + 20z - 220 = 0 \Rightarrow$ T: $5x + 10y + 10z - 110 = 0$
oder $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM_1} + 6/15 \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = (2 \mid 4 \mid 6)$; $\vec{n}_{T} = \overrightarrow{M_1M_2} = (5 \mid 10 \mid 10)$
$B \in T$: $5\cdot 2 + 10\cdot 4 + 10\cdot 6 + D = 0 \Rightarrow D = 110$ etc.

118. a) $M(3|-8|0)$, $r = 15$

$g \cap K$: $(3 + 2t - 3)^2 + (22 + 16t + 8)^2 + (-6 - t)^2 = 225 \Rightarrow 29t^2 + 108t + 79 = 0$

$\Rightarrow t_1 = -1,\ t_2 = -79/29;\ \Rightarrow R_1(1|6|-5),\ \{R_2(-2.45|-21.59|-3.28)\}$

$|t_1|<|t_2| \Rightarrow R_1$ kommt, von P aus gesehen, vor R_2

b) $n(T) = \overrightarrow{MR} = (-2|14|-5) \Rightarrow T: -2x + 14y - 5z + d = 0$; $R \in T \Rightarrow 107 + d = 0$

$\Rightarrow T:\ -2x + 14y - 5z - 107 = 0$

P spiegeln: Lot l: $\vec{r} = (3|22|-6) + t(-2|14|-5) \cap T$

$-2(3-2t) + 14(22+14t) - 5(-6-5t) - 107 = 0 \Rightarrow t = -1\ \ \{F(5|8|-1)\}$

$\Rightarrow P'(7|-6|4);\ \overrightarrow{P'R} = (-6|12|-9) \Rightarrow g'$: $\vec{r} = (1 \mid 6 \mid -5) + t\cdot(2 \mid -4 \mid 3)$

c) $\cos\varphi = |\vec{a} \cdot \vec{a}'/\sqrt{262} \cdot \sqrt{29}| = |4-64-3|/87 = 21/29 \Rightarrow \varphi = 43.60°$

119. g: $\vec{r} = \overrightarrow{OP} + t\cdot\overrightarrow{PQ} = (20 \mid 6 \mid 0) + t\cdot(-8 \mid -4 \mid 2)$;

$g \cap$ xz-Ebene $\Longrightarrow t = 3/2 \Longrightarrow R(8 \mid 0 \mid 3)$

$P'(20 \mid -6 \mid 0)$ od $Q'(12 \mid -2 \mid 2)$

$\Longrightarrow g'$: $\vec{r} = \overrightarrow{OR} + t\cdot \overrightarrow{RP'} = (8 \mid 0 \mid 3) + t\cdot(-12 \mid 6 \mid 3)$

$g' \cap K$: $(8 - 12t)^2 + (6t)^2 + (3 + 3t)^2 - 8\cdot 6t - 10(3 + 2t) + 20 = 0$

$\Longrightarrow 3t^2 - 4t + 1 = 0 \Longrightarrow t_1 = 1,\ t_2 = 1/3;$ $[S_1(-4 \mid 6 \mid 6);]$ $\quad S_2(4 \mid 2 \mid 4)$

120. a) $M_2(0|4|0),\ r_2 = 4;\ M_4(0|13|0),\ r_4 = 1 \Rightarrow M_3(0|10|0),\ r_3 = 2;\ q = 1/2,$

$\Rightarrow r_1 = 8;\ M_1(0|-8|0);\ K_1:\ x^2 + (y + 8)^2 + z^2 = 64$

b) $r(n) = 8\cdot(1/2)^{n-1} = 2^{-n+4};\ V(n) = 4\pi/3 \cdot r^3(n) = \pi/3 \cdot 2^{-3n+14} \leqslant 0.001$

$\Rightarrow n \geqslant 8.01 \Rightarrow n = 9$

c) Durchmesser: $d(n) = 2r(n) = 2r_1\cdot(1/2)^{n-1};\ s(\infty) = d_1\cdot 1/(1-q) = 16/0.5 = 32$

$\Rightarrow K_\infty$: $r = 16$, $M = 0 \Rightarrow K_\infty : x^2 + y^2 + z^2 = 16^2$

121. a) g: $\vec{r} = \overrightarrow{OL} + t\cdot\overrightarrow{LA} = (0 \mid 1 \mid -2) + t \cdot (1 \mid -1 \mid 2)$: K: $(x - 6)^2 + (y + 7)^2 + (z - 4)^2 = 56$

$g \cap K$: $(t - 6)^2 + (-t+8)^2 + (2t - 6)^2 = 56 \Rightarrow 6t^2 - 52t + 80 = 0 \Rightarrow t_1 = 20/3 = 8.66,\ t_2 = 2$

$t_2 < t_1 \Rightarrow t_2$ liefert den Reflexionspunkt an K: $R_1(2 \mid -1 \mid 2)$

$\Rightarrow T: ((x - 6)(-4) + (y + 7)\cdot 6 + (z - 4)(-2) = 56 \Rightarrow T: 2x - 3y + z - 9 = 0$

L an T spiegeln: n: $\vec{r} = \overrightarrow{OL} + t \cdot \vec{n}_{T} = (0 \mid 1 \mid -2) + t\cdot(2 \mid -3 \mid 1) \cap T$:

$4t - 3 + 9t - 2 + t - 9 = 0 \Rightarrow t = 1$; $2T = 2 \Rightarrow L`(4 \mid -5 \mid 0)$

$\Rightarrow$ g`: $\vec{r} = \overrightarrow{OR}_1 + t \cdot \overrightarrow{L`R}_1 = (2 \mid -1 \mid 2) + t \cdot (-2 \mid 4 \mid 2) \cap \pi_3$

$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow R_2(0 \mid 3 \mid 4)$

b) g`an π_3 spiegeln:R_2 ist fix ; $(-2 \mid 4 \mid 2) \dashrightarrow (2 \mid 4 \mid 2)$

$\Rightarrow$ g``: $\vec{r} = (0 \mid 3 \mid 4) + t\cdot(2 \mid 4 \mid 2) \Rightarrow E: 2x + 4y + 2z + D = 0$

$B \in E : 80 + 4 - 4 + D = 0 \Rightarrow D = -80 \Rightarrow E: x + 2y + z - 40 = 0$

g``$\cap$ E: $2t + 6 + 8t + 4 + 2t - 40 = 0 \Rightarrow t = 5/2 \Rightarrow R_3(5 \mid 13 \mid 9)$

122. K: $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$ $\overrightarrow{AB} = (2 \mid 1 \mid 2)$; T_{12}: $2x + y + 2z + D = 0$

$\overline{MT} = r = 3 = \pm(2 + D)/3$; $D_1 = 7$; $D_2 = -11$

T_1: $2x + y + 2z + 7 = 0$; T_2: $2x + y + 2z - 11 = 0$

123. E: $x = -1 + 2u - 4v$; $y = 9 + u - 4v$; $z = 8 + 2u$ => E: $2x - 2y - z + 28 = 0$

K: $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9$

a) l: $\vec{r} = \overrightarrow{OM} + t \cdot \vec{n}_E = (0|0|1) + t \cdot (2|-2|-1)$; l∩K: $4t^2 + 4t^2 + t^2 = 9$ => $t = \pm 1$

=> $P_1(2|-2|0)$; $P_2(-2|2|2)$; $\overline{P_1E} = 12$; $\overline{P_2E} = 6$ => $\mathbf{P_2 = P(-2|2|2)}$; $\mathbf{\overline{PE} = 6}$

b) l∩E: $4t + 4t - (1-t) = -28$ => $t = 3$ => $F(6|-6|-2)$ => $M_2(2|2|0)$; $r_2 = \overline{PE}/2 = 3$

=> $\mathbf{K_2: (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 9}$

c) $\vec{n}_T = \overrightarrow{AB} = (2|1|2)$ => T: $2x + y + 2z + D = 0$; $\overline{MT} = (2 + D)/3 = \pm 3$

=> $D_1 = 7$; $D_2 = -11$ => $\mathbf{T_1: 2x + y + 2z + 7 = 0}$; **T2: $\mathbf{2x + y + 2z - 11 = 0}$**

oder: g: $\vec{r} = \overrightarrow{OM} + t \cdot \overrightarrow{AB}$; g∩K => $t = \pm 1$ => $B_1(2|1|3)$; $B_2(-2|-1|-1)$ etc.

124. a) $\overrightarrow{CA} = (-2 , 2 , -6)$, $\overrightarrow{CB} = (4 , -4 , -3)$

$\cos\varphi = | \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} / \overline{CA} \cdot \overline{CB} | = |(-8 -8 + 18)/\sqrt{44 \cdot 41}| = 2/\sqrt{44 \cdot 41}$

=> $\mathbf{\varphi = 87.30°}$

b) $\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = (-30 \mid -30 \mid 0)$ =F $F(ABC) = 0.5 \cdot |(-30 \mid -30 \mid 0)| = 15 \cdot \sqrt{2}$

E_{ABC} : $x + y + D = 0$, $A \in E$ => $1 + 4 + D = 0$ => $D = -5$ => E: $x + y - 5 = 0$

=> $h = \overline{OE} = 5/\sqrt{2}$ => $V = 1/3 \cdot G \cdot h =$ **25**

c) $\overline{PA} = 2 \cdot \overline{PB}$ => $\overline{PA}^2 = 4 \cdot \overline{PB}^2$

=> $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 + (z + 6)^2 = 4 \cdot \{ (x - 7)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 \}$

=> $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8y + 12z + 53 = 4 \cdot \{ x^2 + y^2 + z^2 - 14x + 4y + 6z + 62 \}$

=> $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 54x + 24y + 12z + 195 = 0$

=> $x^2 + y^2 + z^2 - 18x + 8y + 4z + 65 = 0$

=> $(x - 9)^2 + (y + 4)^2 + (z + 2)^2 = -65 + 81 + 16 + 4 = 36$ => **M(9 | -4 | -2), r = 6**

d) g: $\vec{r} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} = \mathbf{(1 \mid 4 \mid -6) + t \cdot (6 \mid -6 \mid 3)}$.

A\`( 1 |4 | 6 ) , B\`(7 | -2 | 3) => g\`: $\vec{r} = (1 \mid 4 \mid 6) + t \cdot (6 \mid -6 \mid -3)$

=> $t = -1/6$ => **D(0 | 5 | 13/2)**