Matur 1

Hilfsmittel: Formelsammlung, algebra- und graphikfähiger Taschenrechner
Zeit: 4 Stunden

1. Gegeben: $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{4\cdot(x-1)^2}$

a) Diskutiere f und zeichne G_f für $-8 \leqslant x \leqslant 8$, LE: 4H.

b) Von welchen Punkten von G_f erscheint die Strecke AB mit A(-2 | 6), B(6 | -2) unter einem rechten Winkel? (nur x-Koordinaten angeben)

2. Gegeben: $f_k(x) = \left(x + \dfrac{1}{k} \right) \cdot e^{2-kx}$; $k > 0$

a) Bestimme k so, dass der Graph von f_k an der Stelle x = 3 einen Wendepunkt hat.

b) Gib die Gleichung der Kurve an, auf der die Wendepunkte der Graphen aller Funktionen f_k liegen.

c) Wo schneidet die Wendetangente des Graphen von f_2 die x-Achse?

d) Der Graph von f_2 und seine Wendetangente schliessen oberhalb der x-Achse ein endliches Flächenstück F ein. Bestimme den Inhalt von F sowie das Volumen des Körpers, der durch Rotation von F um die x-Achse entsteht.

3. Gegeben sind die Kurven k_1: $y = \dfrac{1}{4} \cdot \sqrt{x^3} - 2$; k_2: $y = 6 - \dfrac{3}{4} \cdot \sqrt{x^3}$.
k_1 und k_2 schliessen zusammen mit der y-Achse ein Kurvendreieck D ein.

a) Berechne Fläche und Umfang von D.

b) D wird ein Rechteck extremalen Umfangs einbeschrieben, wobei eine Rechteckseite auf der y-Achse liegt. Bestimme die Art des Extremums sowie die Seitenlängen des Rechtecks.

c) Nun wird die Fläche, die von k_1 und den beiden Koordinatenachsen eingeschlossen ist, um die x-Achse rotiert. Bestimme die gesamte Oberfläche des Rotationskörpers.

4. Geg. : Ebene E: $x - 4y - 3z - 9 = 0$;
Lichtstrahl g von A(3 | 22 | -6) aus, mit Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -16 \\ 1 \end{pmatrix}$;
Kugel K um M(3 | -8 | 0) mit Radius r = 15.

a) Berechne folgende Winkel: $\alpha = \sphericalangle(E,g)$, $\beta = \sphericalangle(E, \pi_2)$.

b) Der Lichstrahl g trifft im Punkt R auf die Kugel K und wird dort reflektiert. Bestimme R, die Tangentialebene T an K in R sowie die Gleichung des reflektierten Strahls g*.

c) Die Ebene E schneidet die Kugel K in einem Kreis k´. Gib den Mittelpunkt M´ und den Radius r´dieses Kreises an.

d) Bestimme den Abstand der Geraden g von der x-Achse.

5. Eine Tombola verspricht, dass jedes 5. Los ein Treffer ist.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
A: Von 10 Losen sind genau 2 Treffer, B: Von 10 Losen sind alle Nieten,
C: Von 10 Losen sind mindestens 2 Treffer

b) Wieviele Lose müssen gekauft werden, damit mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0.95$ mindestens 2 Treffer erzielt werden?

c) Ein frustrierter Loskäufer argwöhnt, dass die Angabe "jedes 5. Los ein Treffer" nicht stimmt. Er will mit dem Kauf von 100 Losen seine Vermutung bestätigen. Konstruiere einen Test mit der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ (H_0, H_1, Verwerfungsbereich V).
Wie wird entschieden, wenn 15 der gekauften Lose Treffer sind?

6. Gegeben: K_a: $x^2 + y^2 = 100$, K_b: $x^2 + y^2 - 6x - 12y + 41 = 0$.

a) Bestimme die Endpunkte jener Sehne von K_a, deren Mittelpunkt gleich dem Mittelpunkt von K_b ist.

b) Bestimme die Gleichung der Tangenten von P(-6 | 17) an K_a samt den Berührpunkten und dem Schnittwinkel.

c) Gib die Gleichung aller Kreise an, die K_a von innen und K_b umfassend berühren und deren Mittelpunkt auf der Geraden g: $y = 6$ liegt.

7. Kurzaufgaben:

a) Löse ohne Rechner: $\sin^2(x) \cdot 2^{\log_{19}(19^{2\cdot 19})} = 2^{113} \cdot 2^{110} \cdot 2^{107} \cdot \ldots \cdot 2^{-112}$

b) Eine bezüglich der y-Achse symmetrische Parabel 4. Ordnung hat in W(2 | 0) eine Wendetangente, die parallel zur Geraden g: $y = 8x - 10$ ist. Wie lautet die Gleichung der Parabel?

Matur 1: Lösungen

1. a) $f'(x) = (x-5)(x+1)^2/4(x-1)^3$; $f''(x) = 6(x+1)/(x-1)^4$; $f'''(x) = -6(3x+5)/(x-1)^5$

1. $\mathbb{D} = \mathbb{R} / (1)$, Pol: $x_1 = 1$; Nullstelle $x_2 = -1$; keine Symm. ers.

2. $f'(x) = 0 \Rightarrow x_2 = -1$, $x_3 = 5$, $f''(-1) = 0$, $f''(5) = 9/64 \Rightarrow T(5 \mid 27/8)$

3. $f''(x) = 0 \Rightarrow x_2 = -1$, $f'''(-1) = 3/8 \Rightarrow Tr(-1 \mid 0)$

4. $f(x) = x/4 + 5/4 + (3x-1)/(x-1)^2 \Rightarrow a_1(x) = x/4 + 5/4$, a_2: $x = 1$

$\lim(x \to \pm\infty)\ f(x) = \infty$, $\lim(x \uparrow\downarrow 1\ f(x) = \infty$

b) $M_{AB}(2 \mid 2)$,

$r = AB/2 = \sqrt{}(64 + 64)/2 = 4\sqrt{2}$

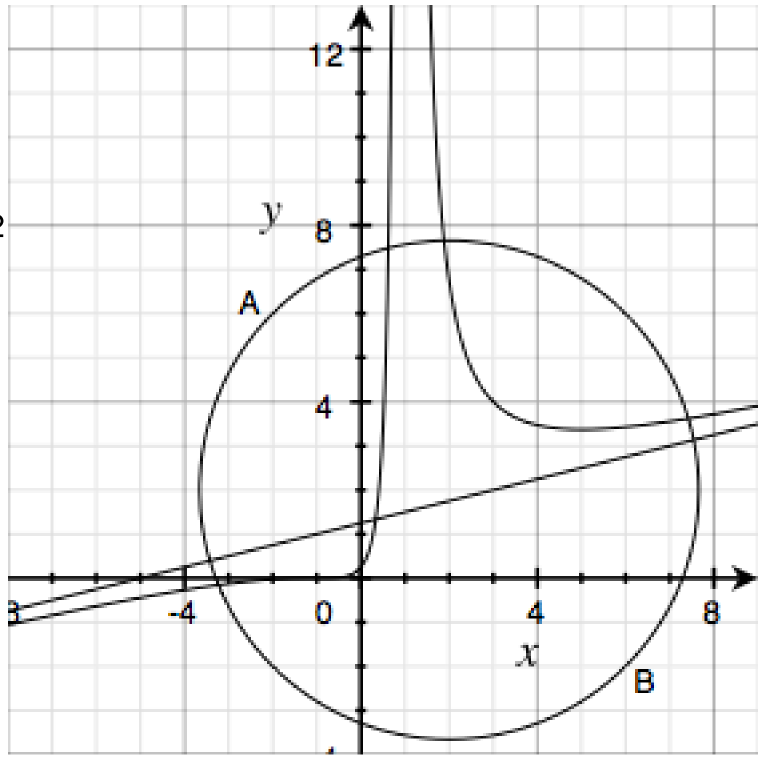
$\Rightarrow K: (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 32$

$K \cap G_f$: $(x - 2)^2 + (f(x)- 2)^2 = 32$

TR =>

$x_1 = -3.230 \quad x_2 = 0.6224$

$x_3 = 1.886 \quad x_4 = 7.420$



2. a) $f_k'(x) = -k \cdot x \cdot \exp(2-kx)$, $f_k''(x) = (k^2 \cdot x - k) \cdot \exp(2-kx) = 0 \Rightarrow x = 1/k = 3 \Rightarrow$ **$k = 1/3$**

b) a) $\Rightarrow x = 1/k$, $f_k(1/k) = 2e/k \Rightarrow W(1/k \mid 2e \cdot 1/k)$, d.h. $1/k \dashrightarrow 2e \cdot 1/k$

=> **g.O.: $y = 2e \cdot x$**

c) $f_2 = f$;

$f'(x) = -2 \cdot x \cdot \exp(2-2x)$, $f''(x) = (4 \cdot x - 2) \cdot \exp(2-2x)$, $f'''(x) = 8(1 - x)\exp(2-2x)$

$f'(1/2) = -e = m_t = (y - e)/(x - 1/2) \Rightarrow$ **t: $y = -ex + 3e/2$**; $y = 0 \Rightarrow$ **$x = 3/2$**

d) $F = \int(-1/2, 1/2)\ f(x)\,dx + 1/2 \cdot 1 \cdot e = (e^3-3e)/4 + e/2 =$ **$(e^3 + e)/4$**

$V = \pi\int(-1/2, 1/2)\ f(x)^2\,dx + \pi\int(1/2, 3/2)\ (-ex + 3e/2)^2\,dx$

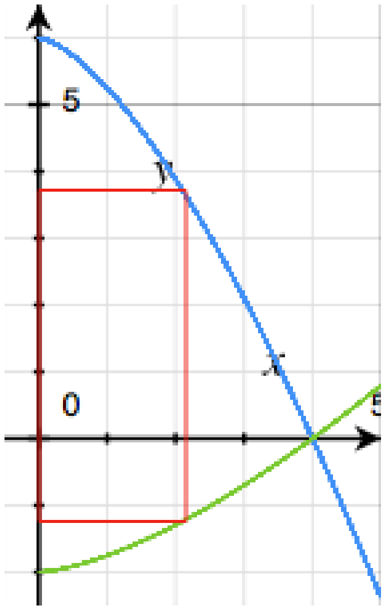
$= \pi/32 \cdot (e^6 - 13e^2) + \pi/3 \cdot e^2 =$ **$(3e^4 - 7)e^2\pi/96$**

3. a) $F = \int_0^4 (k_2(x) - k_1(x))\,dx =$ **96/5** $= 19.2$

$U = 2 + 6 + \int_0^4 \sqrt{(1 + k_1'(x)^2)}\,dx + \int_0^4 \sqrt{(1 + k_2'(x)^2)}\,dx$

$= 8 + 122/27 + 2(97\sqrt{97} - 64)/243$

$=$ $\mathbf{(194\sqrt{97} + 2914)/243 = 19.85}$



b) $U = 2(x + k_2(x) - k_2(x))$; $U(x) = 2(x + 8 - \sqrt{x^3})$

$U'(x) = (2\sqrt{x^3} - 3x^2)/2\sqrt{x^3} = 0 \Rightarrow x = 4/9$

$U''(4/9) = -9/4 \Rightarrow$ **Max. bei x = 4/9**

Seiten: **a = 4/9**,

b = $k_2(4/9) - k_1(4/9)$ **= 208/27** $= 5.630$

$U_{max} = 440/27$

c) $S = \pi \cdot 2^2 + \int_0^4 (k_1(x) \cdot \sqrt{(1 + k_1'(x)^2)})\,dx$

$= 4\pi + \pi \cdot 5.2519 =$ $\boldsymbol{\pi \cdot 9.252 = 17.82}$

falls mit k_2 gerechnet:

$S = 36\pi + \pi \cdot 23.554 = 59.554 \cdot \pi = 187.1$

4. a) $\sin\alpha = |\vec{v}\cdot\vec{n}| / |\vec{v}|\cdot|\vec{n}| = |-2 + 64 - 3| / \sqrt{261})\cdot\sqrt{(26)} = 0.71622$ => $\boldsymbol{\alpha = 45.74}$

$\cos\beta = |\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2| / |\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2| = 1/1\cdot\sqrt{(26)} = 0.19612$ => $\boldsymbol{\beta = 78.69}$

b) $g \cap K$: $(3 - 2t - 3)^2 + (22 - 16t + 8)^2 + (-6 + t)^2 = 15^2$ => $t_1 = 1$, $t_2 = 79/29 > 1$

=> Auftreffpunkt mit t_1: **R(1 | 6 | -5)**

T: $((x - 3)(1 - 3) + (y + 8)(6 + 8) + (z - 0)(-5 - 0) = 15^2$

=> **T: 2x - 14y + 5z + 107 = 0**

Lot zu T durch A: l: $\vec{r}$ = (3] 22] -6) + t·(2] -14] 5)

$l \cap T$: $2(3 + 2t) - 14(22 - 14t) + 5(-6 + 5t) + 107 = 0$ => t = 1 => F(5 | 8 | -1)

=> A* mit t = 2: A*(7 | -6 | 4)

=> **g*:** $\boldsymbol{\vec{r}}$ **=** $\overline{OA}$*+ $\overline{A^*R}$ = (7 | -6 | 4) + t´(-6 | 12 | -9) = **(7 | -6 | 4) + t(-2 | 4 | -3)**

c) Lot n von E durch M:n: $\vec{r}$ = (3 | -8 | 0) + t(1 | -4 | -3)

$n \cap E$: $(3 + t) - 4(-8 - 4t) -3(-3t) - 9 = 0$ => t = -1 => **M´(2 | -4 | 3)**

$\overline{MM'} = \sqrt{(1 + 16 + 9)} = \sqrt{(26)}$ => $r' = \sqrt{(15^2 - 26)} = \boldsymbol{\sqrt{(199)} = 14.12}$

d) $P \in g$ => P(x | 0 | 0), $Q \in$ x-Achse => Q(3 -2t | 22 - 16t | -6 + t)

=> $\overline{PQ}$ = (3 - 2t - x | 22 - 16t | -6 + t)

$\overline{PQ}$ · (1 | 0 | 0) = 0 => x = 3 - 2t

$\overline{PQ}\cdot\vec{v} = 0$ => $-2(3 -2t - (3 - 2t)) - 16(22 - 16t) + (-6 + t) = 0$ => t = 358/257

=> P(55/257 | -74/257 | .1184/257), Q(55/257 | 0 | 0)

$\boldsymbol{\overline{PQ} = 74/\sqrt{(257)} = 4.616}$

5. a) $P(A) = \binom{10}{2}\cdot 0.2^2\cdot 0.8^8 = \mathbf{0.3020}$

$P(B) = 0.8^{10} = \mathbf{0.1074}$

$P(C) = 1 - P(0) - P(1) = 1 - 0.8^{10} - 10\cdot 0.2\cdot 0.8^9 = 0.6242$

b) $P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - 0.8^n - 10\cdot 0.2\cdot 0.8^{n-1} \geqslant 0.95 = n \geqslant 14.4$ => $n \geqslant 14$

c) **H_0: p = 0.2; H_1: p < 0.2 (wg. Frustration), einseitiger Test,** n = 100

P(k Treffer) = $\Sigma(i = 0, i = k) \binom{100}{i} 0.2^i\cdot 0.8^{100-i}$

Suche k so, dass P(k) < 0.05

P(13) = 0.046, P(14 = 0.08 => **V = (0, 1, 2, ..., 13)**

k = 15 => H_0 nicht verwerfen

6. a) K_a: $M_a = O$, $r_a = 10$, K_b: $M_b(3 \mid 6)$, $r_b = 2$

Steigung $(OM_b) = 2 \Rightarrow m_s = -1/2 = (y - 6)/(x - 3) \Rightarrow s: y = -x/2 + 15/2$

$K_a \cap s$: $x^2 + (-x/2 + 15/2)^2 = 100 \Rightarrow x_{12} = 3 \pm 2\sqrt{11}$

=> $\mathbf{P_1(3 - 2\sqrt{11} \mid 6 + \sqrt{11}), P_2(3 + 2\sqrt{11} \mid 6 - \sqrt{11}),}$

$P_1(-3.633 \mid 9.317)$, $P_2(9.633 \mid 2.683)$

b) $t: y = mx + q$, $P(-6 \mid 17) \in K_a \Rightarrow 17 = - 6m + q \Rightarrow q = 6m + 17$

$\Rightarrow t: y = mx + (6m + 17)$, HNF_t: $(mx - y + (6m + 17))/\sqrt{(m^2 + 1)} = 0$

$Ot = 10 = \pm (6m + 17))/\sqrt{(m^2 + 1)}$; "+": $m_1 = -3/4$, $m_2 = 63/16$, "−": keine Lösung

=> $\mathbf{t_1: y = -3/4 \cdot x + 25/2}$, B_1: $x^2 + (-3/4 \cdot x + 25/2)^2 = 100 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow \mathbf{B_1(6 \mid 8)}$

$\mathbf{t_2: y = 63/16 \cdot x + 325/8}$, B_2: $x^2 + (63/16 \cdot x + 325/8)^2 = 100 \Rightarrow x = -126/13$

=> $\mathbf{B_2(-126/13 \mid 32/13) = B_2(-9.692 \mid 2.462)}$

$\tan\alpha = |(-3/4 - 63/16)/(1 - 3(4 \cdot 63/16)| = 12/5 \Rightarrow \mathbf{\alpha = 67.38°}$

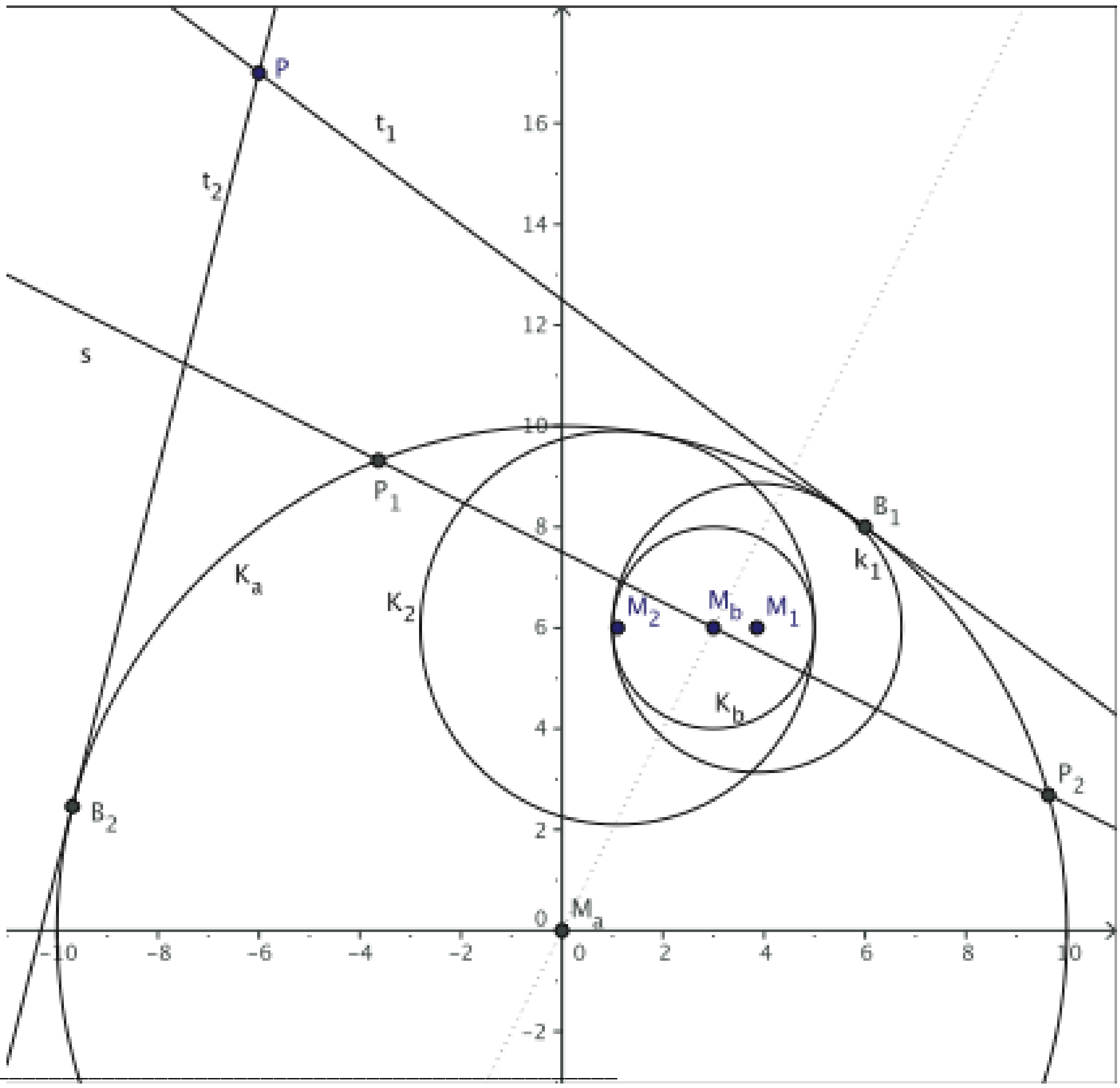
c) Ges: K: $M(u \mid 6)$, r; K_a von innen: $OM = 10 - r$, K_b umfassend: $M_bM = r - 2$

$\Rightarrow u^2 + 36 = (10 - r)^2$ und $(3 - u)^2 + (6 - 6)^2 = (r - 2)^2$

TR: $u = 85/22$ und $r = 63/22$ oder $u = 11/10$ und $r = 39/10$

=> $\mathbf{K_1: (x - 85/22)^2 + (y - 6)^2 = (63/22)^2 \; ; M_1(3.864 \mid 6) \; r_1 = 2.864}$

$\mathbf{K_2: (x - 11/10)^2 + (y - 6)^2 = (39/10)^2 \; ; M_2(1.1 \mid 6), r_2 = 3.9}$



7. a) $\mathrm{Log}_{19}(19^{2\cdot 19}) = 2\cdot 19\cdot\cdot \mathrm{og}_{19}(19) = 38$

a.R.: $a_1 = aa3$, $d = -3$; $a_n = -112 = 113 + (n-1)(-3) \Rightarrow 225 + 3 = 3n \Rightarrow n = 76$

$s_{76} = 38(113 - 112) = 38$

$\Rightarrow \sin^2(x) = 2^{38}/2^{38} = 1 \Rightarrow \sin x = \pm 1 \Rightarrow$ $\mathbf{x = \pi/2 + k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$

b) p: $y = ax^4 + bx^2 + c$; $y' = 4ax^3 + 2bx$; $y'' = 12ax^2 + 2b$

$\Rightarrow W \in p \Rightarrow 0 = 16a + 4b + c$; $y'(2) = 8 = 32a + 4b$; $y''(2) = 0 = 48a + 2b$

$\Rightarrow a = -1/8$; $b = 3$; $c = -10$

$\Rightarrow$ **p: $\mathbf{y = -x^4/8 + 3x^2 - 10}$**