Matur 10

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

Zeit: 4 Stunden

1. Kurzaufgaben:

a) Löse: $2^{4x^3 - 13x^2 + 11} = e^{(2x^3 + 10x - 2)\cdot\frac{\log_8\sqrt{8}}{\log_8 e}}$ (Tip: $x_1 \in \mathbb{Z}$!)

b) Beweise die Formel für das Volumen eines Kugelsektors.

c) A_0, A_1, A_2, A_3... ist eine Folge von ähnlichen Rechtecken, für die gilt:

(1) die Fläche von A_0 ist $1 m^2$

(2) die Mittelsenkrechte der längeren Seite von A_{n-1} zerlegt A_{n-1} in 2 Exemplare von A_n ($n = 1, 2, 3, ...$).

Berechne (ohne Taschenrechner) die kürzere Seite von A_4 und A_n, sowie die Summe der Umfänge aller Rechtecke der Folge.

2. Geg: $f(x) = (ax^2 + bx):(x - 2)$

a) Beweise: f hat keinen Wendepunkt.

b) Diskutiere f für $a = 1$ und $b = -1.5$ und bestimme die Steigungen der Tangenten, welche von $P(4|0)$ an den Graphen von f führen.

3. Geg: E_1: $x + 2y + 2z + 11 = 0$; E_2: $4x - 8y - z - 77 = 0$; g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$A(-10 \mid -20 \mid 15)$; $B(0 \mid -30 \mid -25)$.

Der Mittelpunkt M der Kugel K, welche die Ebenen E_1 und E_2 berührt, liegt auf g und hat eine positive x-Koordinate.

a) Bestimme die Gleichung von K.

Falls a) nicht gelöst wurde: wähle im folgenden $M(8|10|3)$ und den Kugelradius $r = 14$.

b) Wie lange ist die kürzeste Verbindungsstecke von einem Punkt auf K zu einem Punkt der Geraden $h = (AB)$?

c) Bestimme die gesamte Oberfläche jenes Segmentes von K, das unterhalb π_1 liegt.

4. Susann offeriert Andrea folgendes Spiel: Als Einsatz muss Andrea 3 Franken bezahlen, dann wird ein Würfel dreimal hintereinander geworfen. Erscheinen 3 Sechsen, so erhält Andrea 36 Franken, bei 2 Sechsen 12 Franken und bei einer Sechs noch 5 Franken.

a) Es sei X der Gewinn von Andrea. Bestimme die Verteilung von X sowie E(X) und V(X).

b) Bei welchem Einsatz wäre das Spiel fair ?

c) Andrea vermutet, dass der Würfel zu ihren Ungunsten gezinkt ist und notiert daher die Anzahl Sechsen bei 100 Würfen. Beschreibe für Andrea ausführlich einen Test (H_0, H_1, Verwerfungsbereich) mit der statistischen Sicherheit von 97.5%.

d) Wie sieht der Test mit 100 Würfen und der statistischen Sicherheit von 97.5% aus, wenn Susann und Andrea gemeinsam den Würfel kaufen und sie beide sicher sein wollen, dass er nicht gezinkt ist ?

e) Beim Test in c) sei der Würfel tatsächlich gezinkt (P(Sechs)=0.1). Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Hypothese "Würfel ist L-Würfel" nicht verworfen wird ?

5. Die Funktion $f(x) = 8e^{-x}(1 - e^{-x})$ hat den Graphen **G**.

a) Bestimme die Schnittpunkte von **G** mit den Koordinatenachsen, die Extrem- und Wendepunkte und zeichne **G** für $-0.2 \leqslant x \leqslant 5$ (LE = 5H).

b) Im ersten Quadranten wird von **G** und der Kurve $y = e^{-x}$ eine rechts ins Unendliche reichende Figur eingeschlossen. Bestimme ihre Fläche.

c) Bestätige, dass $F(x) = 4\cdot(1 - e^{-x})^2$ eine Stammfunktion von f ist. Gib jenen Bereich an, in welchem F monoton steigend ist und bestimme dort die Umkehrfunktion $\overline{F}$ samt Definitions- und Wertebereich.

6. Einer Kugel K mit Radius 1 ist die 3-seitige Pyramide P mit regulärer Grundfläche und maximalem Volumen einbeschrieben.
Gib Grundseite a, Höhe h und Oberfläche O von P an sowie das Verhältnis der Volumina von P und K. Interpretiere auch das Verhältnis von a und der Seitenkante s.

7. Geg: k_1: $y = 0.5 \cdot x$; k_2: $y = 0.5 \cdot x + \cos x$; $x \in \,]0\,,\,2\pi[$.

a) Zeichne die beiden Kurven k_1 und k_2 (x-Achse: π = 12H, y-Achse: LE = 4H) und berechne ihre Schnittpunkte sowie die Fläche, welche sie zwischen diesen Schnittpunkten einschliessen.

b) Welcher Punkt von k_2 hat von k_1 den grössten Abstand und wie gross ist dieser ?

c) Die Tangente und die Kurvennormale von k_2 in $P(\pi/2|...)$ beranden im 1. Quadranten mit den Koordinatenachsen ein 4-Eck. Dieses wird um die y-Achse rotiert. Wie gross ist das Volumen des entstehenden Rotationskörpers ?

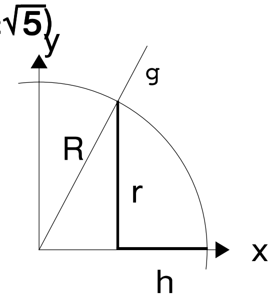
Matur 10: Lösungen

1. a) ln(x) anw. => $(4x^3 - 13x^2 + 11x)\cdot\ln(2) = (2x^3 + 10x - 2)\cdot 1.5\cdot\ln(2)$

=> $2x^3 - 26x^2 - 30x + 28 = 0$ => $x\in\{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14\}$ und $(x-1)\in\{\pm 1. \pm 13\}$

=> $x\in\{0, 2, -12, 14\}$, Probe => $\mathbf{x_1 = 14}$

$(x^3 - 26x^2 - 30x + 28):(x - 14) = x^2 + x - 1$ => $\mathbf{x_{23} = 0.5(-1\pm\sqrt{5})}$



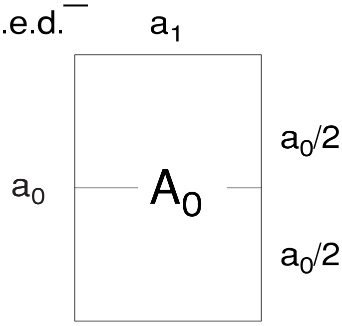
b) $r = \sqrt{R^2-(R-h)^2} = \sqrt{2Rh-h^2}$

g: $y = \sqrt{2Rh-h^2}/(R-h)\cdot x$; K: $x^2 + y^2 = R^2$

$V_{Sektor}/\pi = {}_0\int^{R-h} [g(x)]^2dx + {}_{R-h}\int^{R}[K(x)]dx$

$= {}_0\int^{R-h}(2Rh-h^2)/(R-h)^2 \cdot x^2dx + {}_{R-h}\int^{R}(R^2-x^2)dx$

$= [(2Rh-h^2)x^3/(3(R-h)^2)]_0^{R-h} + [R^2x-x^3/3]_{R-h}^{R} = \mathbf{2R^2h/3}$ q.e.d.



c) $a_0 : a_1 = a_1 : a_0/2 \Rightarrow a_1 = a_0/\sqrt{2}$

=> $a_0 \cdot a_1 = a_0^2/\sqrt{2} = 1[m^2] \Rightarrow a_0 = 2^{1/4}$

und $\{a_n\}$ ist g.F. mit $q = 1/\sqrt{2}$

=> $\mathbf{a_5}$ (=kürz. Seite v. A_4) = $\mathbf{2^{-9/4}}$, $\mathbf{a_{n+1} = 2^{-(2n+1)/4}}$

$U_0 = 2(a_0+a_1) = 2(2^{1/4} + 2^{-1/4}) = 2^{3/4}(2^{1/2} + 1)$

$U_n = U_0\cdot q^n$ mit $q = 1/\sqrt{2}$ (wg. Ähnlichkeit)

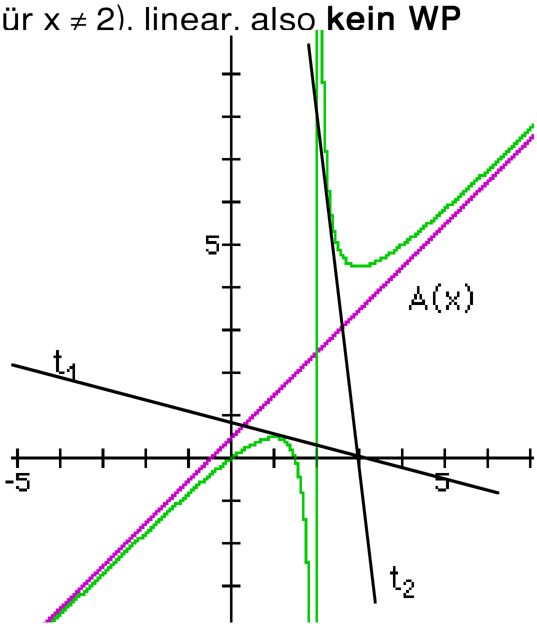
$\Sigma U_i = U_0\cdot 1/((1-2^{-1/2}) = ... = \mathbf{2^{5/4}(3 + 2^{3/2}) = \sqrt[4]{32}\cdot(3 + \sqrt{8})}$ (= 13.86)

2. a) $f'(x) = (ax^2-4ax-2b)/(x-2)^2$, $f''(x) = (8a+4b)/(x-2)^3$

falls $b \neq -2a$ => $f''(x) =$ hat keine Lösung => **kein WP**

falls $b = -2a$ => $f(x) = 2ax(x-2)/(x-2) = 2ax$ (für $x \neq 2$). linear. also **kein WP**

b) $f'(x) = (x^2-4x+3/(x-2)^2$, $f''(x) = 2/(x-2)^3$



keine Symm. ers., $N_1(0|0)$, $N_2(1.5|0)$,

Pol bei $x = 2$

Extr: $f'(x) = 0$ => $x_4 = 3$, $x_5 = -1$;

$f''(3)>0$, $f''(-1)<0$ => **$T(3|9/2)$, $H(1|1/2)$**

$f''(x) = 0$ hat keine Lösung => **keine WP**

Asymptoten:

$(x^2-1.5x):(x-2) = x + 1/2 + 1/(x-2)$

=> **$A(x) = x + 1/2$;** vert. As.: $x = 2$

Tangenten durch $P(4|0)$: $m = (y-0)/(x-4)$

=> t: $y = mx - 4m$; T ist Tangente <=>

die Gleichung $G \cap t$ hat Doppellösung

$G \cap t$: $mx -4m = (x^2 - 1.5x)/(x - 2)$

=> $(m-1)x^2 + /1.5-6m)x + 8m = 0$

$D = 4m^2 +14m + 2.25$, Doppellösung <=> $D = 0$ => **$m_{12} = (-7\pm2\sqrt{10})/4$**

($m_1 = -0.169$, $m_2 = -3.331$)

oder: t durch $P(4|0)$ und Berührpkt. $B(x_0|f(x_0))$: $m = f'(x_0) = (f(x_0)-0)/(x_0-4)$

=> $(x_0-4)\cdot f'(x_0)-f(x_0) = 0$, einsetzen => $9x_0^2 - 32x_0 + 24 = 0$

=> $x_{0/12}= (16 \pm2\sqrt{10})/9$; $m_{12} = f'(x_{0/12})$.......

3. a) W_{12}: $1/3 \cdot (x + 2y + 2z + 11) = \pm1/9 \cdot (4x - 8y - z - 77)$

=> W_1: $x - 14y - 7z - 110 = 0$; W_2: $7x - 2y + 5z - 44 = 0$

$W_1 \cap g$: $(1+t) - 14(-4+2t) - 7(7-t) - 110 = 0$ => $t = -51/10$ => $M'(-61/10 \mid ...|...)$

$W_2 \cap g$: $7(1+t) - 2(-4+2t)+5(7-t) - 44 = 0$ => $t = 3$ => **$M(4|2|4)$**

$\pm R = 1/3 \cdot (4 + 4 + 8 + 11) = 9$ oder $\pm R = 1/9 \cdot (16 - 16 - 4 - 77) = -9$

=> **K: $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 = 81$**

b) Lot von M auf h; h: $\vec{r} = (-10|-20|15) + t(-1|1|4)$, F:Lotfusspunkt $\in$ h;

$\overrightarrow{MF} \cdot \vec{a}_h = 0$ <=> $(-10-t-4|-20+t-2|15+4t-4)\cdot(-1|1|4) = 0$ => $18t+36=0$

=>$t = -2$ => $F(-8|-22|7)$ => $\overline{MF}^2 = 27$ => **d = 27-9 = 18**

oder: $\overline{Mh} = 1/a \cdot |\vec{a} \times \overrightarrow{AM}| = 1/\sqrt{18} \cdot |(-1|1|4)x(14|22|-11)| = 27$ .....

c) r: Radius des Schnittkreises mit π_1, $M_{Kugel}(...|...|$**4**$)$ => $r^2 = R^2 - 4^2 = 65$

Höhe des Segmentes: $h = R - 4 = 5$ => **O =** $\pi r^2 + 2\pi Rh$ = **155π**

4. a) $P(X=-3) = 125/216$; $P(X=2) = 75/216$, $P(X=9) = 15/216$, $P(X=33) = 1/216$

=> $\mathbf{E(X)} = 1/216 \cdot (-3\cdot 125 + 2\cdot 75 + 9\cdot 15 + 33) = \mathbf{-19/72 = -0.264}$ **[Fr.]**

$V(X) = E(x^2) - E^2(x) = 1/216 \cdot (9\cdot 125 + 4\cdot 75 + 81\cdot 15 + 33^2) - 19^2/72^2$

$= \mathbf{89'857/1584 = 17.3}$

b) $E(x) = 0 = 1/216 \cdot (-e\cdot 125 + (5-e)\cdot 75 + (12-e)\cdot 15 + (36-e))$

=> $\mathbf{e = 591/216 = 2.74}$ **[Fr.]**

c)**H_0: P(Sechs) = 1/6, H_1: P(Sechs) <1/6,** $\alpha = 2.5\% = 0.025$

P(Anz. Sechsen bei 100 Würfen$\leqslant$k)$\leqslant$0.025 => k = 9 => **V = {0, 1, ..., 9}**

Falls in100 Würfen 9 oder weniger Sechsen erscheinen, verwirf H_0 zugunsten von H_1.

d) zweiseitiger Test: **H_1: P(Sechs) $\neq$ 1/6**; a/2 = 0.0125

P(Anz. Sechsen bei 100 Würfen$\leqslant$k)$\leqslant$0.0125 => k = 8

P(Anz. Sechsen bei 100 Würfen$\geqslant$k-1)$\geqslant$0.9875 => k = 26

V = {0,1,...,7,8,26,27,...,100}

d) P = P(Anz. Sechsen bei 100 Würfen$\geqslant$ 10 und P(Sechs)=0.1)

= 1 - P(Anz. Sechsen bei 100 Würfen$\leqslant$9 und P(Sechs)=0.1)

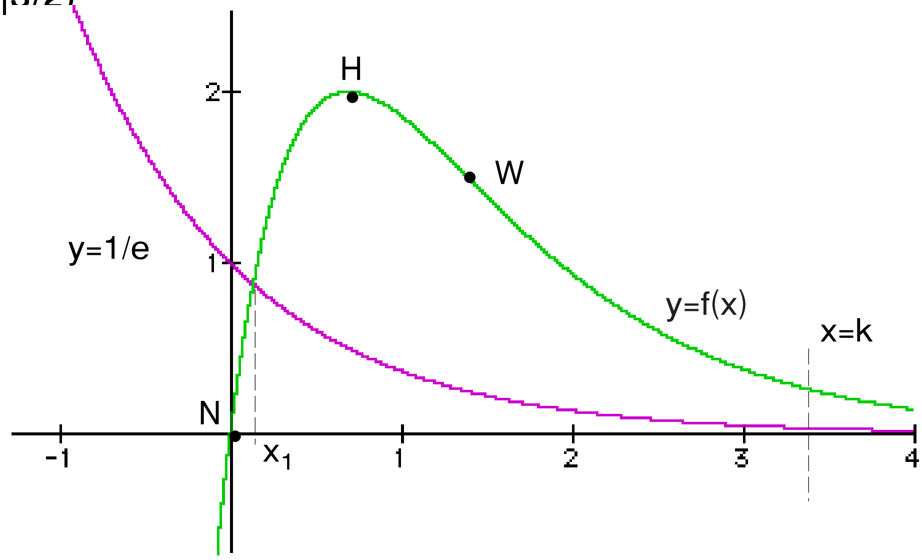
= 1 - 0.451 = **0.549**

5. $f'(x) = 8(-e^{-x} + 2e^{-2x})$; $f''(x) = 8(e^{-x} - 4e^{-2x})$

a) $f(x) = 0 \Rightarrow e^{-x} = 1 = x = 0 \Rightarrow$ **N(0|0)** (einziger SP)

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2e^{-x} = 1 \Rightarrow x = \ln(2)$; $f''(\ln(2)) = -4 \Rightarrow$ **H(ln(2)|2)**

$f''(x) = 0 \Rightarrow e^{-x} = 1/4 \Rightarrow x = \ln(4)$; $f''(x)$ wechselt bei $x = \ln(4)$ das Zeichen von – auf + => **WP(ln(4)|3/2)**



b) $A = \lim_{k\to\infty} \int_{x_1}^{k}[f(x) - e^{-x}]dx$; x_1: $8e^{-x} - 8e^{-2x} = e^{-x} \Rightarrow e^{-x} = 7/8$

$\Rightarrow$ $\mathbf{x_1 = \ln(8/7)}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{A} = \lim_{k\to\infty}[-7e^{-x} + 4e^{-2x}]_{x_1}^{k}$

$= \lim_{k\to\infty}[-7e^{-k} + 4e^{-2k} + 7e^{-\ln(8/7)}) - 4e^{-2\ln(8/7)}] = 7\cdot 7/8 - 4\cdot 49/64 = \mathbf{49/16}$

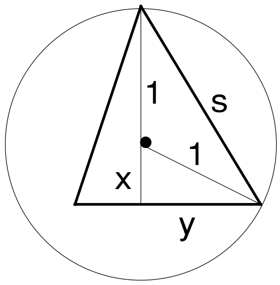
c) $\mathbf{F'(x)} = 4\cdot 2(1-e^{-x})\cdot(-e^{-x})\cdot(-1) = \mathbf{f(x)}$;

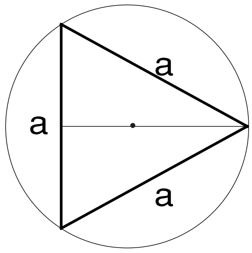
$F'(x) = f(x) < 0$ in $\mathbb{R}^+$ => F ist m.s in $\mathbb{R}^+$; $\overline{F}$: $y = 4(1 - e^{-x})^2$

$\Rightarrow +\sqrt{y}/2 = 1-e^{-x}$ ("+" weil $(1-e^{-x}) > 0$ in $\mathbb{R}^+$ $\Rightarrow x = \ln(2/(2-\sqrt{y}))$

$\Rightarrow$ $\mathbf{\overline{F}(x) = \ln(2/(2-\sqrt{x}))}$; $\mathbb{D}_{\overline{F}} = \mathbb{W}_F =]o ; 4[$; $\mathbb{W}_{\overline{F}} = \mathbb{D}_F = \mathbb{R}^+$

6. $y = 2/3 \cdot 2\sqrt{3}/2 = a/\sqrt{3}$





$1 = x^2 + a^2/3 \Rightarrow a^2 = 3 - 3x^2$ (N)

(H) $V = 1/3 \cdot a^2\sqrt{3}/4 \cdot (1 + x)$

(N) in (H): $V(x) = \sqrt{3}/4 \cdot (1 + x - x^2 - x^3)$

$V'(x) = 3/4 \cdot (1 - 2x - 3x^2) = 0$

$\Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1/3 \Rightarrow$ $\mathbf{x = 1/3}$

$V(-1) = V(1) = 0$, $V(x)>0$ in $[-1;1] \Rightarrow$ Max.

Oder $V''(1/3)<0 \Rightarrow$ Max.

$\Rightarrow$ $\mathbf{a = \sqrt{8/3} = 2\sqrt{6}/3,\ h = 4/3}$

$s^2 = (1+x)^2 - (a/\sqrt{3})^2 = 8/3 = a^2! \Rightarrow$ $\mathbf{O} = 4 \cdot a^2/4 \cdot \sqrt{3} = \mathbf{8\sqrt{3}/3}$

$V_K = 4\pi/3$, $V_P = 1/3 \cdot a^2\sqrt{3}/4 \cdot 4/3 = 8\sqrt{3}/27$

$\Rightarrow$ $\mathbf{V_P : V_K = 2\sqrt{3}/(9\pi) = 1 : 8.16}$

a : s = 1 => regelm. Tetraeder

oder: (N) $:x = \sqrt{1-a^2/3} \Rightarrow V(a) = a^2/12 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{3-a^2})$ etc.

7. $x/2 = x/2 + \cos(x) \Rightarrow x_1 = \pi/2,\ x_2 = 3\pi/2$

$\Rightarrow$ $\mathbf{S_1(\pi/2 \mid \pi/4),\ S_2(3\pi/2 \mid 3\pi/4)}$

$\mathbf{A} = \int_{\pi/2}^{3\pi/2}[x/2 - (x/2+\cos(x))]dx = \int_{\pi/2}^{3\pi}(-\cos(x))dx = -[\sin(x)]_{\pi/2}^{3\pi} = \mathbf{2}$

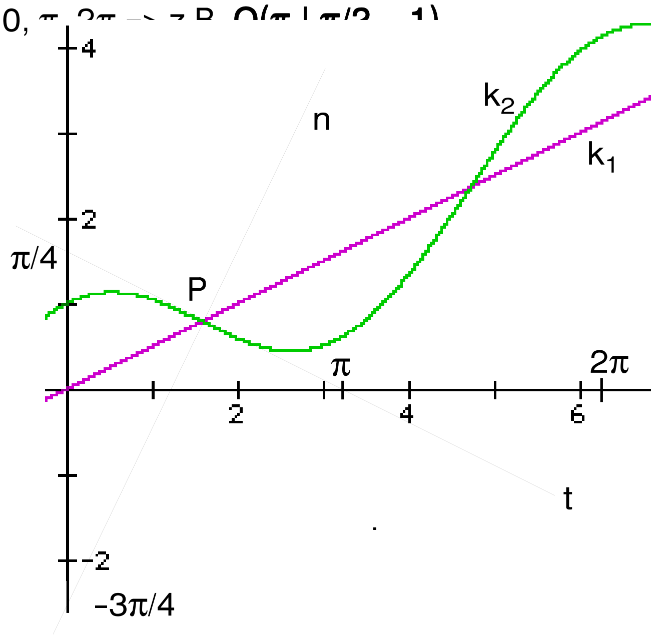
b) $Q \in k_2$ hat von k_1 max. Abstand, wenn Tangente an k_2 in $Q \parallel k_1$ ist

k_2': $y' = 0.5 - \sin(x) = 0.5 = m_{k_1} \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi \Rightarrow$ z.B. $\mathbf{Q(\pi \mid \pi/2 - 1)}$

$HNF(k_1): 1/\sqrt{5} \cdot (x - 2y) = 0$

$\Rightarrow \pm\mathbf{d} = 1/\sqrt{5} \cdot (\pi -)\pi-2))$

$= \mathbf{2/\sqrt{5} = 0.894}$



c) $P(\pi/2 \mid \pi/2)$; k_2': $y' = 0.5 - \sin(x)$

$\Rightarrow y'(\pi/2) = -1/2 = m_{t;} \Rightarrow M_n = 2$

$\Rightarrow$ **t:** $\mathbf{y = -x/2 + \pi/2;}$

n: $\mathbf{y = 2x - 3\pi/4}$

$n \cap$ x-Achse $\Rightarrow x_1 = 3\pi/8$;

$n \cap$ y-Achse $\Rightarrow y_1 = -3\pi/4$

Körper (V) besteht aus Kegel (V_1)

und Kegelstumpf (V_2)

$V_1 = \pi/3 \cdot (\pi/2)^2 \cdot \pi/4$;

V_2 = V(grosser Kegel)-V(kl. Kegel)

$= \pi/3 \cdot (\pi/2)^2 \cdot \pi - \pi/3 \cdot (3\pi/8)^2 \cdot 3\pi/4$

$\Rightarrow \mathbf{V} = \pi^4/3[1/16 + 1/4 - 27/256] = \mathbf{53\pi^4/768 = 6.72}$