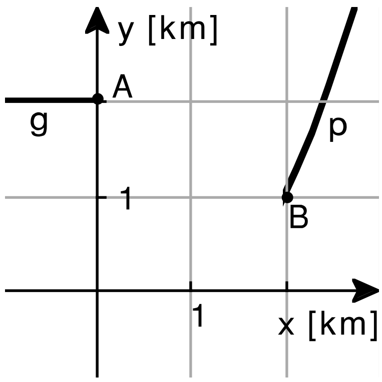
Matur 2

Hilfsmittel: Formelsammlung, algebra- und graphikfähiger Taschenrechner
Zeit: 4 Stunden

1.



a) Von der skizzierten Bahnlinie mit den Teilstücken g: $y = 2$ und p: $y = (x-1)^2$ fehlt das Stück zwischen A(0 | 2) und B(2 | 1). Plane mit Hilfe einer geeigneten Polynomfunktion die Linie zwischen A und B so, dass in A und in B die Krümmung der Bahnlinie sich stetig ändert.

b) Bestimme im Punkt A die Krümmungen der beiden Kurven, die dort zusammen treffen. Dasselbe für B.

c) Zeichne für $-1 \leqslant x \leqslant 3$ die gesamte Bahnlinie sowie die zu dieser Bahnlinie gehörende Krümmungsfunktion in ein geeignetes KS.

d) Wie teuer wird die Bahnstrecke zwischen A und B (4 sign. Ziffern, Kosten pro km: Fr. 875´000.-)?

2. a) Die Kurve k: $y = e^x$ wird im Intervall $[-10\,;\,0\,]$ um die x-Achse gedreht. Berechne das Volumen V und die Mantelfläche M des entstehenden Rotationskörpers (6 sign. Ziffern).

b) Dasselbe für das Intervall $]\,-\infty\,;\,0\,]$ (exakt und auf 6 sign. Ziffern).

c) Berechne die x-Koordinaten der Mittelpunkte aller Kreise mit Radius $r = e$, welche k in B(1 | ....) berühren (exakt).

3. $f(x) = \dfrac{x^3}{12 \cdot (x+a)}\,;\;\; a \in \mathbb{R}$

a) Bestimme a so, dass f an der Stelle $x = -3/2$ ein Extremum hat (von Hand, mit allen Zwischenschritten).

Im Folgenden sei $a = -2$.

b) Diskutiere f.

c) Gib die Gleichungen aller Tangenten an, welche von P(4 | 0) aus an den Graphen von f gelegt werden können.

4. Ein Körper K besteht aus einer quadratischen Säule, der auf der Deckfläche eine genau passende quadratische Pyramide aufgesetzt ist. Dieser zusammengesetze Körper K ist einer Kugel mit Radius 1 einbeschrieben. Erstelle eine oder mehrere sinnvolle Skizzen und bestimme dann die Abmessungen von K so, dass das Volumen von K maximal wird. Gib die Längen aller Kanten von K an und bestimme, wieviele % des Kugelvolumens K ausfüllt (4 sign. Ziffern) .

5. a) Im Viereck ABCD ist bekannt: $a = 12.34$, $b = 8.12$, $c = 5.96$, $d = 7.22$ und $\beta = 64.89°$. Berechne α, γ, δ und die Längen der Diagonalen.

b) Gegeben ist die Kurve k: $y = e^{-x} \cdot \sin^2 x$. F_n sei die n-te Fläche, die von k und der x-Achse im ersten Quadranten eingeschlossen ist. Bestimme: $F_1, F_2, F_3, F_n, \sum_{k=1}^{\infty} F_k$

6. Gegeben sind die Ebenen: E_1: $x - 2y + 2z + 4 = 0$; E_2: $2x + 3y - 6z - 5 = 0$ und die Punkte: $P(13 \mid 4 \mid 9)$; $Q(1 \mid 2 \mid 4)$. Bestimme:

a) eine Gleichung der Geraden $g = (PQ)$,

b) die Winkel $\alpha = \sphericalangle(E_1, g)$ und $\beta = \sphericalangle(E_1, E_2)$,

c) alle Punkte auf g, die von E_1 und E_2 gleiche Abstände haben,

d) eine Gleichung der Kugel K um P, die E_1 berührt,

e) eine Gleichung der Tangentialebene T an K im Punkt $A(5 \mid y \mid 8)$ $(y > 0)$.

7. a) Laut Umfrage von SRG SSR Idée Suisse vom Mai 2005 lehnen 44% der Bevölkerung den Beitritt zum Schengener Abkommen ab. Nach einer umstrittenen Rede von Minister B. will die Schweizerische Vaterlandspartei wissen, ob sich dieser Anteil verändert hat. Eine Umfrage im Juni bei 255 Stimmberechtigten soll Klarheit geben (Irrtumswahrscheinlichkeit: 5%, nur Ja- oder Nein-Antworten).

a_1) Konstruiere einen Test mit allen notwendigen Angaben.

a_2) 125 der Befragten sagen, sie würden den Vertrag ablehnen. Hat die Rede von B. Wirkung gezeigt?

b) Anna offeriert dir ein verlockendes Spiel: Du legst als Einsatz e Franken auf den Tisch und wirfst dann 3 Würfel. Wirfst du einem Pasch (drei gleiche Augenzahlen), so erhälst du deinen Einsatz zurück und zusätzlich für jedes geworfene Auge das k-Fache deines Einsatzes. Andernfalls verlierst du deinen Einsatz. X sei dein Gewinn in Franken. Bestimme Verteilung und Erwartungswert von X (allgemein und für $e = 10$, $k = 3$). Wie gross muss k sein, damit das Spiel fair ist?

Matur 2: Lösungen

1. a) $p(x) = x^2 - 2x + 1$,

$p'(x) = 2x - 2$, $p''(x) = 2$

Bedingungen:

$f(0) = 2$, $f'(0) = 0$,

$f''(0) = 0$; $f(2)$

$= p(2) = 1$; $f'(2) = p'(2) = 2$;

$f''(2) = p''(2) = 2$

=> Polynom 5. Grades

6 Unbekannte):

$f(x) = ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex + k$

$f'(x)$) $5ax^4+4bx^3+3cx^2+2dx+ e$

$f''(x) = 20ax^3+12bx^2+6cx + 2d$

=> $2 = k$, $0 = e$, $0 = d$; weiter:

$1 = 32a + 16b + 8c + 2$ und

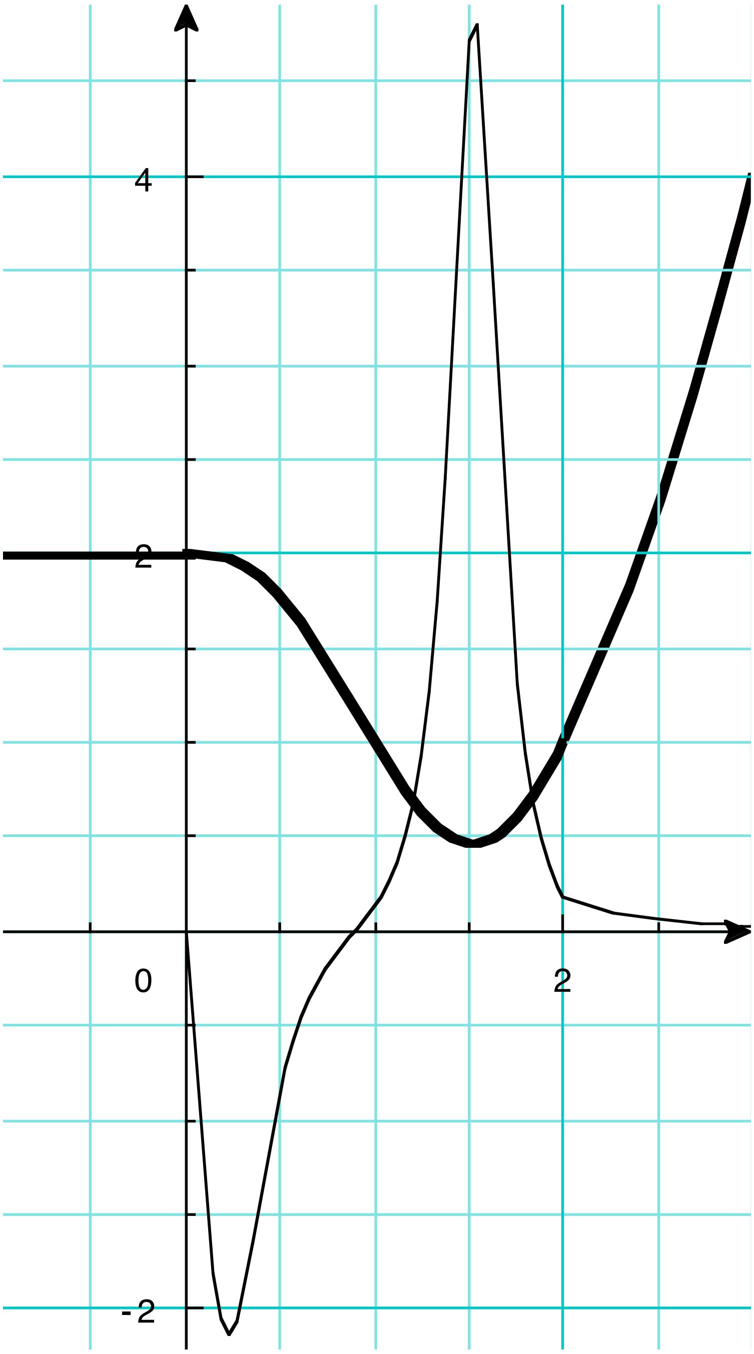
$2 = 80a + 32b + 12c$

und $2 = 160a + 48b + 12c$

TR => $a = -7/16$, $b = 36/16$,

$c = -11/4$

$\mathbf{f(x) = -7x^5/16 + 35x^4/16 - 11x^3/4 + 2 = (-7x^5 + 35x^4 - 44x^3 + 32)/16}$



b) $k_p(x) = 2/(4x^2 - 8x + 5)^{3/2}$

$k_f(x) = -1024x(35x^2-105x+66)/$

$(1225x^8 - 9800x^7 + 28840x^6 - 36960x^5 + 17424x^4 + 256)^{3/2}$

Krümmungen in A:

$\mathbf{k_g(0) = 0 = k_f(0)}$,

in B:

$\mathbf{k_p(2) = 2/5^{3/2} = 2\sqrt{5}/25 = k_f(2)}$

c) ....

d) Bogenlänge: $B = \int(1 + f'(x)^2)^{1/2}dx,0,2$ = (TR) = 3.0116950

=> Kosten: 875´00 · 3.0116950 = 2´635´233.– = **2´635´000.–**

2. a) $V = \pi\cdot(1 - e^{-20})/2 = 1.57080$; $M = 2\pi \cdot 1.47748 = 7.21151$

b) $V = \pi/2 = 1.57080$; $M = \pi \cdot (\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})) = 7.21180$

c) $B(1]e)$, $k'(1) = e$, n: $y = mx + q \Rightarrow m_n = -1/e$; $B \in n \Rightarrow e = -1/e + q \Rightarrow q = e + 1/e$

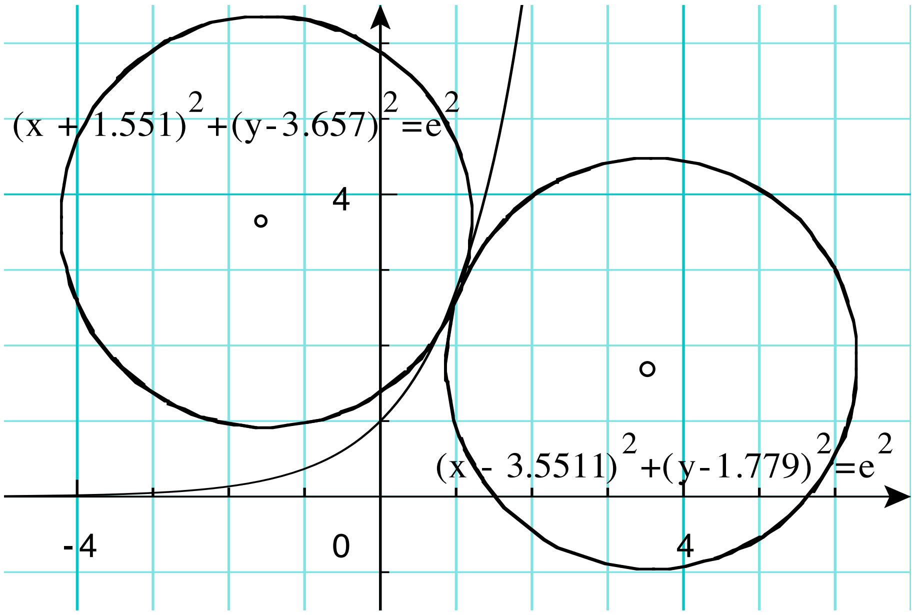
$\Rightarrow n$: $y = -1/e \cdot x + e + 1/e$

$M(x]y) \in n \Rightarrow \overline{MB}^{\,2} = e^2 = (1 - x)^2 + (e - n(x))^2 = (1 - x)^2 + (1/e \cdot (x - 1))^2$

$= (1 - x)^2(1 + 1/e^2) \Rightarrow (1 - x)^2 = e^4/(e^2 + 1)$

$\Rightarrow$ **$x_{12} = 1 \pm e^2/\sqrt{(e^2 + 1)}$; $x_1 = 3.55113$, $x_2 = -1.55113$**

($y_1 = 1.7797739$, $y_2 = 3.6567897$)



3. a) $f'(x) = 1/12 \cdot (3x^2 \cdot (x + a) - x^3 \cdot 1)/(x + a)^2 = 0 \Rightarrow 2x^3 + 3x^2 a = 0 \Rightarrow a = -2x/3$

$x = -3/2 \Rightarrow$ **$a = 1$**

b) $f'(x) = x^2(x-3)/(6(x-2)^2)$; $f''(x) = x(x^2 - 6x + 12)/(6(x - 2)^3$, $f'''(x) = -4/(x - 2)^4$

1. $D = \mathbb{R}\backslash\{2\}$, Pol bei $x = 2$, keine symm. ers. Nullst.: $x = 0$

2. $f'(x) = 0 \Rightarrow x_2 = 0$, $x_3 = 3$, $f''(0) = 0$??, $f''(3) = 3/2 \Rightarrow$ **T(3] 9/4)**

3. $f''(x) = 0 \Rightarrow x_2 = =$ ist einzige Lösung, $f'''(0) = -1/4 \Rightarrow$ **TP(0] 0)**

4. $f(x) \to \infty$ für $x \to +- \infty$; $f(x) \to +\infty$ für $x \downarrow 2$; $f(x) \to -\infty$ für $x \uparrow 2$

vert. As: $x = 2$

$f(x) = x^2/12 + x/6 + 1/3 + 2/(3(x-2))$

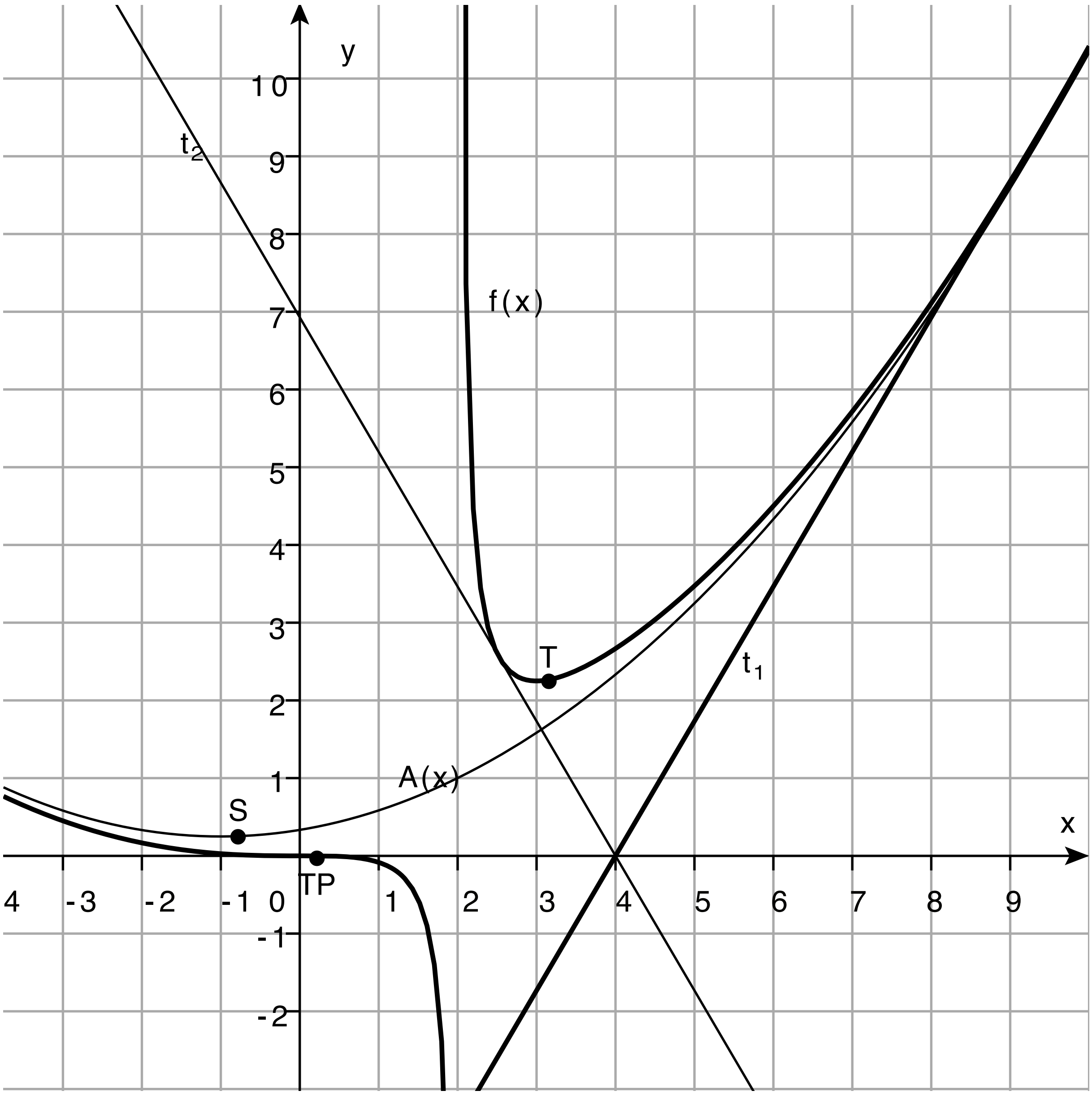
$\Rightarrow$ **$A(x) = x^2/12 + x/6 + 1/3 = (x^2 + 2x + 4)/12$; S(−1] 1/4)**

c) t: $y = mx + q$; $P \in t \Rightarrow 0 = 4m + q \Rightarrow q = -4m$.

$t \cap G_f$: $mx - 4m = x^3/(12(x-2))$ und $m = f'(x) = x^2(x-3)/(6(x-2)^2)$

TR $\Rightarrow x = 2/\sqrt{3} + 3)$, $m = \sqrt{3}$ oder $x = -2/\sqrt{3} + 3)$, $m = -\sqrt{3}$ oder $x = m = 0$

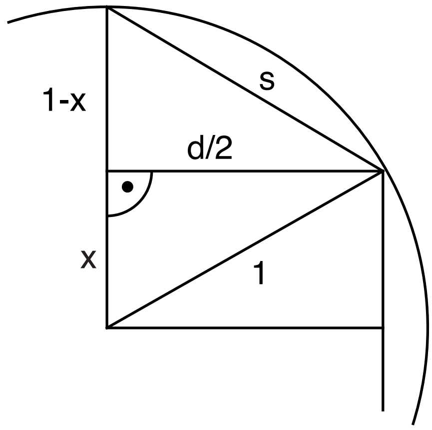
$\Rightarrow$ **t_1: $y = \sqrt{3} \cdot x - 4\sqrt{3}$; t_2: $y = -\sqrt{3} \cdot x + 4\sqrt{3}$; t_3: $y = 0$**



4. $d/2 = \sqrt{1-x^2}$,

Quadratseite^2 $= a^2 = 2\cdot(1-x^2) = 2 - 2x^2$,

Pyramidenhöhe: $1 - x$



a) **V(x)** $= V_S + V_P =$

$(2x)\cdot(2 - 2x^2) + 1/3 \cdot (2 - 2x^2)\cdot (1 - x)$

$= (2 - 2x^2)\cdot(2x + 1/3 \cdot (1-x))$

$= \mathbf{2/3 \cdot (1 - x^2)(5x + 1)}$

$V'(x) = -10x^2 - 4/3 \cdot x + 10/3 = 0$ und $x > 0$

$\Rightarrow x = (2\sqrt{19} - 1)/15 = 0.5145$

=> **Säulenhöhe: 2x = 1.029**

Säulengrundkante: $a = \sqrt{2-2x^2} = 1.213$

Pyramidenhöhe: $1 - x = (16 - 2\sqrt{19})/15 = 0.4855$

Seitenkante(Pyramide): $s^2 = a^2/2 + (1 - x)^2 \Rightarrow$ **$s = \sqrt{1 - x^2} = 0.8575$**

$V_{max} = V((0.5145) = 1.751$,

$\mathbf{V_{max}/V_{kugel} = 0.4180 = 41.80\%}$

Variante:

$V(a) = a^2\cdot 2x + a^2\cdot(1 - x)/3 = a^2/3 \cdot (5x + 1)$ mit $x^2 = 1 - a^2/2$

$\Rightarrow V(a) = a^2/3 \cdot (5\cdot\sqrt{1 - a^2/2} + 1)$, $V'(a) = 0 \Rightarrow a = 2\sqrt{2\sqrt{19} + 74))/15 = 1.213$ etc.

5. a) $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\beta$

$\Rightarrow$ **$e = 11.54$**

$\sin\beta/e = \sin\gamma_1/a \Rightarrow \gamma_1 = 75.5303°$

$\Rightarrow \alpha_1 = 39.5797°$

$\cos\delta = (c^2 + d^2 - e^2)/2cd$

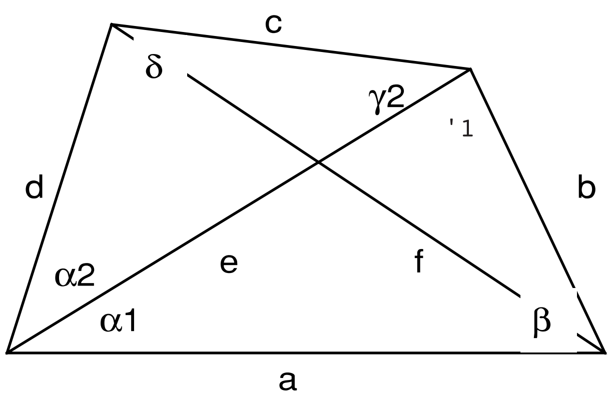
$\Rightarrow$ **$\delta = 121.93°$**

$\sin\delta/e = \sin\gamma_2/d \Rightarrow \gamma_2 = 32.0722°$

$\Rightarrow \alpha_2 = 25.9969°$

$\Rightarrow$ **$\gamma = 107.60°$, $\alpha = 65.58°$**

$f^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\gamma \Rightarrow$ **$f = 11.43$**



b) Schnittpunkte mit x-Achse: $n\cdot\pi$

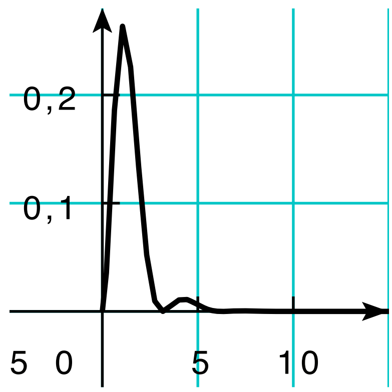
$F_1 = \int y,x,0,\pi = 2/5 \cdot (1 - e^{-\pi})$,

$F_2 = 2/5 \cdot (1 - e^{-\pi}) \cdot e^{-\pi}$,

$F_3 = 2/5 \cdot (1 - e^{-\pi}) \cdot e^{-2\pi}$

$F_n = 2/5 \cdot (1 - e^{-\pi}) \cdot e^{-(n-1)\pi}$, g.F. mit $q = e^{-\pi}$

$\Rightarrow s = F_1\cdot 1/(1-e^{-\pi}) =$ **2/5** oder mit TR



6. a) g = (PQ) : $\vec{r} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PQ}$ = **(13]4]9) + t · (-12]-2]-5)**

b) α = arsin](-12]-2]-5) · (1]-2]2)]/(3√173) =]-18]/(3√173) = **27.14°**

β = arccos] (1]-2]2) · (2]3]-6)]/(3 · 7) =]-16]/(3 · 7) = **40.37°**

c)W_{12} : (x – 2y + 2z + 4)/3 = +-(2x + 3y – 6z – 5)/7

W_1: x – 23y + 32z + 43 = 0 ; W_2: 13x – 5y – 4z + 13 = 0

$W_1 \cap g$: (13 - 12t)-23(4-2t)+32(9-5t)+43=0 => t = 2 => **S_1(-11] 0] -1)**

$W_2 \cap g$: 13(13 - 12t)-5(4-2t)-4(9-5t)+13=0 => t = 1 => **S_2(1] 2] 4)**

d) n: $\vec{r} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{n}_{E1}$ = (13]4]9) + t · (1]-2]2)

$n \cap E_1$: (13 + t) – 2(4 – 2t)+2(9+2t)+4=0 => t = -3 => B(10] 10] 3)

r = $\overline{PB}$ = √(9 + 36 + 36) = 9 oder HNF(E_1,P): (13 – 8 + 18 + 4)/3= 9

K: $(x - 13)^2 + (y - 4)^2 + (z - 9)^2 = 81$ <=>

$x^2 + y^2 + z^2 - 26x - 8y - 18z + 185 = 0$

e) $n_T = \overrightarrow{AP}$ = (8]-4]1) => T:8x – 4y + z +D = 0

A ∈ T : 40 – 32 + 8 + D 0 0 => D = -16 => **T: 8x – 4y + z – 16 = 0**

f) $\vec{a}_s = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ = (1]-2]2) x (2]3]-6) = (6]10]7),

z.B. S(x]y]0) ∈ $E_1 \cap E_2$ => x – 2y + 4= 0 und 2x + 3y – 5 = 0 => S(-2/7]13/7]0)

=> **s: $\vec{r}$ = (-2/7]13/7]0) + t · (6]10]7)**

7. a_1) H_0: keine Aenderung, P(Nein) = 0.44

H_1: Aenderung; P(Nein) ≠ 0.44 (zweiseitiger Test)

b(n) = $\Sigma(\binom{255}{k} \cdot 0.44^k \cdot 0.56^{255-k}$,k,0,n) => b(96) = 0.0232, b(97) = 0.031

b(n) = $\Sigma(\binom{255}{k} \cdot 0.44^k \cdot 0.56^{255-k}$,k,n,255) => b(128) = 0.0271, b(129) = 0.0202

=> **V = (0,1,2,....,96,129,130,....,255)**

a_2) 125 ∉ V => **nein** (H_0 kann nicht verworfen werden)

Falls H_1: P(nein) > 0.44: V = (126,127, ..., 255)

b)

X	-e	3ke	6ke	9ke	12ke	15ke	18ke
P(X=x)	210/216	1/216	1/216	1/216	1/216	1/216	1/216

E(X) = (-210e + 3ke(1+2+3+4+5+6))/216 = (-210e + 63ke)/216

= **7e(3k – 10)72 = – 35/36 = -0.9722 [Fr.]**

E(X) = 0 = 7e(3k – 10)/72

=> **e = 0 und k beliebig oder e beliebig und k = 10/3**