Matur 3

Hilfsmittel: Formelsammlung, algebra- und graphikfähiger Taschenrechner
Zeit: 4 Stunden

1. a) Diskutiere $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2}$

Zeichne den Graphen für $-8 \leqslant x \leqslant 8$, LE = 2H.

b) Der Graph von $g(x) = \dfrac{a}{x} + b$ schneidet den von f im Punkt P(2 | 0) rechtwinklig. Bestimme a und b und zeichne den Graphen von g.

c) Bestimme das endliche Flächenstück, das von den beiden Graphen und der Geraden s: x = 4 eingeschlossen wird.

2. Gegeben sind die Ebene E: $2x - 2y - z - 12 = 0$ sowie die Punkte A(1 | 2 | 4), B(2 | 2 | 6), C(3 | 5 | 2), P(15 | 16 | 13) und Q(6 | 7 | 4).

a) Bestimme die Fläche des Dreiecks ABC sowie den Winkel α.

b) Gib die Gleichung der Ebene F durch die Punkte A, B, C an. Zeige: E und F sind parallel. Gib den Abstand a der Ebenen an.

c) Spiegle die Gerade g = (PQ) an E.

3. Gegeben ist eine Kugel mit dem Radius R = 1.

a) Bestimme Radius, Höhe und Volumen jenes Zylinders, der der Kugel einbeschrieben ist und der maximales Volumen hat (exakt).

b) Setze auf den beiden Grundkreisen des bei a) gefundenen Zylinders je einen genau passenden geraden Kreiskegel, dessen Spitze auf der Kugel liegt. Bestimme das Volumen dieses zusammengesetzten Körpers (exakt).

c) Es lässt sich ein derartiger, der Kugel einbeschriebener, zusammengesetzter Körper finden, der ein noch grösseres Volumen hat als der bei b) gefundene. Wie gross ist sein Volumen (4 sign. Ziffern) ?

4. a) Diskutiere die Funktion $f(x) = x^3 \cdot e^{-x}$ und zeichne den Graphen im Bereich [-1 ; 5], LE = 5H.

b) Wo schneidet die Kurvennormale im Punkt P(1 | ...) die x-Achse?

c) Eine Stammfunktion von f hat die Form $F(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d) \cdot e^{-x}$.

Bestimme a, b, c, d sowie $\int_0^\infty f(x)\,dx$.

5. Gegeben: Gerade t: $x - y + 10 = 0$, Kreis K_1: $x^2 + y^2 + 14x + 14y + 90 = 0$, Kreis K_2 mit Mittelpunkt $M_2(14 \mid -2)$ und Radius $r_2 = 5\sqrt{2}$.

Gesucht: Gleichung aller Kreise, die t als Tangente haben und die K_1 und K_2 von aussen berühren.

6. Die Kurve k: $y = x^2$ und die Gerade g: $y = 1$ begrenzen ein Gebiet G, dem ein Quadrat Q so einbeschrieben werden soll, dass 2 Ecken auf g, die andern auf k liegen.

a) Bestimme die Quadratseite a sowie das Verhältnis der Flächen von G und Q in der Form F(G) : F(Q) = 1 : ... (Zeichnung mit LE = 10H).

b) Gib ebenso das Verhältnis der Volumina jener Drehkörper an, welche durch Rotation von G bzw. Q um die y-Achse entstehen.

c) Welches ist das grösste Volumen, das ein dem Gebiet G einbeschriebenes Rechteck bei Rotation um die y-Achse erzeugen kann?

7. a) Theoretische Fahrprüfung: Von 50 Fragen werden 10 ausgelost; davon müssen mindestens 8 richtig beantwortet werden. Sebastian hat nur 40 der 50 Fragen gelernt und geht trotzdem an die Prüfung. Wie gross sind die Chancen, dass ihm mindestens 8 der gelernten Fragen gestellt werden?

b) Löse: $e^{\ln(x^3 - x^2 + 5x + 2)} = 4x + 2x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \ldots$

Tipp: Die Gleichung hat mindestens eine Lösung aus $\mathbb{Z}$.

c) Bestimme **alle** Stellen, an denen die Kurve $y = 2 \cdot \cos(x) - \sin(2x)$ eine horizontale Tangente hat.

Matur 3: Lösungen

1. a) $f'(x) = (4+x)/x^3$, $f''(x) = (-2x-12)/x^4$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, Pol bei $x_1 = 0$

Nullstellen: $x_3 = 2$, $x_4 = -1$

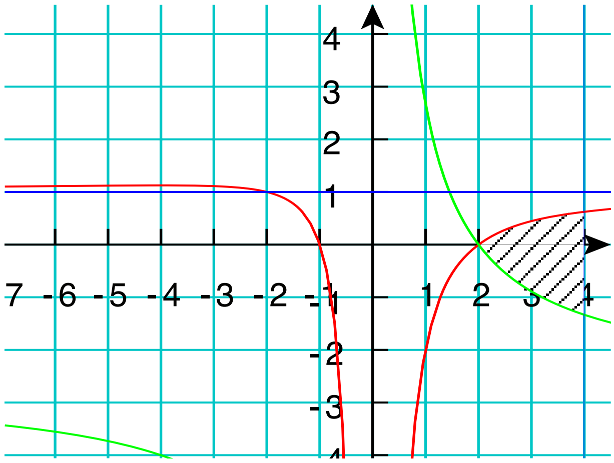
Extrema: $x_5 = -4$, $f''(-4) = -0.0156$

=> **H(−4 | 9/8)**

Wendepunkte: $x_6 = -6$, Zeichenw. von + auf − (oder: $f'''(x) = (6x+48)/x^5$, $f'''(-6) = -1/648$) => **W(−6 | 10/9)**

Vert. As: **x = 0**, horiz. As : **y = 1**

weitere Punkte(4 | 5/8), (1 | -2), (-0.5 | -9), (-2 | 1)



b) $g'(x) = -a/x^2$ => $g'(2) = -a/4 = -1/f'(2) = -4/3$ => **a = 16/3**

$P \in G_g$ => $0 = 8/3 + b$ => **b = − 8/3**

c) $\int_2^4 (f(x) - g(x))dx = \int_2^4 (-2/x^2 - 19/3x + 11/3)dx = [2/x - 19/3 \cdot \ln x + 11/3 \cdot x]_2^4$

$= 1/2 - 38/3 \cdot \ln 2 + 44/3 - (1 - 19/3 \cdot \ln 2 + 22/3) =$ **$- 19/3 \cdot \ln 2 + 41/6 = 2.443$**

2. a) z.B. $F_{ABC} = 0.5 \cdot \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 0.5 \cdot |(1| 0 | 2)\times(2 | 3 | -2)| = 0.5 \cdot |(-6 | 6 | 3)| =$ **4.5**

$\alpha = \arccos(\cdot\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} / \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC}) = \arccos(-2/(\sqrt{5} \cdot \sqrt{17}) =$ **102.53°**

b) $\vec{n}_F = (-6 | 6 | 3) \approx (2 | -2 | -1)$ siehe a) => F: $2x - 2y - z + d = 0$;

$a \in F$ => $2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 4 + d = 0$ => $d = 6$ => **F: $2x - 2y - z + 6 = 0$**

$\overline{AE} = (2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 4 - 12)/3 = -18/3$ => ; **a = |−6| = 6.**

c) g: $\vec{r} = \overrightarrow{OP} + t^* \cdot \overrightarrow{PQ} = (15 | 16 | 13) + t^* \cdot (-9 | -9 | -9)$ =>

g: $\vec{r}$ = (15 | 16 | 13) + t·(1 | 1 | 1)

$g \cap E$: $2(15 + t) - 2(16+t) -(13+t) -12 = 0$ => $t = -27$ => **S(−12 | −11 | −14)**

Lot zu E durch P: n: $\vec{r} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{n}_E = (15 | 16 | 13) + t \cdot (2 | -2 | -1)$

$n \cap E$: $2(15 + 2t) - 2(16-2t) -(13-t) -12 = 0$ => $9t = 27$ => **D(21 | 10 | 10)**

=> **P*(27 | 4 | 7)** => g*: $\vec{r} = \overrightarrow{OS} + t \cdot \overrightarrow{P^*S} = (-12 | -11 | -14) + t^* \cdot (-39 | -15 | -21)$

=> **g*: $\vec{r}$ = (−12 | −11 | −14) + t· (13 | 5 | 7)**

oder Lot zu E durch Q: n: $\vec{r} = \overrightarrow{OQ} + t \cdot \vec{n}_E = (6 | 7 | 4) + t \cdot (2 | -2 | -1)$

$n \cap E$: $2(6 + 2t) - 2(7-2t) -(4-t) -12 = 0$ => $9t = 18$ => **D(10 | 3 | 2)**

=> **Q*(14 | −1 | 0)**

=> g*: $\vec{r} = \overrightarrow{OS} + t \cdot \overrightarrow{Q^*S} = (-12 | -11 | -14) + t^* \cdot (-26 | -10 | -14)$ =>

g*: $\vec{r}$ = (−12 | −11 | −14) + t· (13 | 5 | 7)

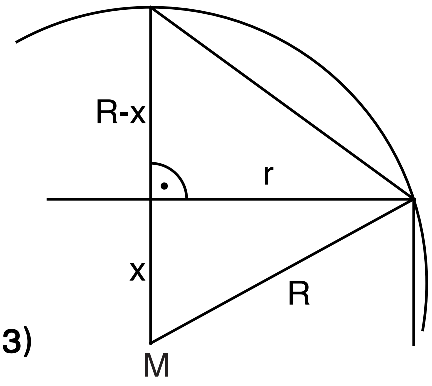
3. a) $r^2 = 1^2 - x^2$

$V_1(x) = \pi r^2 \cdot 2x = 2\pi x(1-x^2) = 2\pi(x - x^3)$

$V_1'(x) = 2\pi(1-3x^2) = 0 \Rightarrow x = 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$

$\Rightarrow$ $\mathbf{h = 2\cdot\sqrt{3}/3}$ $= 1.1547$; $\mathbf{r = \sqrt{2/3}}$ $= 0.81650$

$\mathbf{V_{1.max} = V_1(1/\sqrt{3}) = 4\cdot\sqrt{3}\cdot\pi/9} = 2.418$



b) $V_2 = V_{1.max} + 2\cdot V_{Kegel} = 4\cdot\sqrt{3}\cdot\pi/9 + 2\pi/3 \cdot r^2\cdot(1-x)$

$= 4\cdot\sqrt{3}\cdot\pi/9 + 2\pi/3 \cdot 2/3\cdot(3 - \sqrt{3})/3$

$= 4\pi/27 \cdot (3\cdot\sqrt{3} + 3 - \sqrt{3}) = \mathbf{4\pi/27 \cdot (2\cdot\sqrt{3} + 3)}$

$= 3.009$

c) $V_3(x) = V_1(x) + 2\pi/3 \cdot (1-x^2)\cdot(1-x) = 2\pi/3 \cdot (3x - 3x^3 + 1 - x - x^2 + x^3)$

$= 2\pi/3 \cdot (-2x^3 - x^2 + 2x + 1)$

$V_3'(x) = 2\pi/3 \cdot (-6x^2 - 2x + 2) = 0 \Rightarrow 3x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = (-1 + \sqrt{13})/6 = 0.4342585$

$\Rightarrow$ $\mathbf{V_{3.max} = 3.17542}$

4. a) $f`'(x) = (3x^2 - x^3)e^{-x}$

$f''(x) = (x^3 - 6x^2 + 6x)e^{-x}$

1. $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, keine Pole,

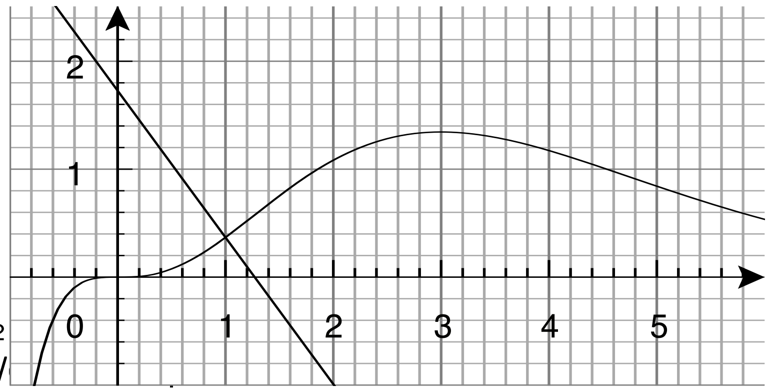
keine Symm. ers.

Nullstelle: $\mathbf{x_1 = 0}$

2. $x^2(3 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$x_2 = 3$. Bei x_1 kein ZW, bei x_2

ZW von + auf - => **H(3 | 27/**



3. $x(x^2 - 6x + 6) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_{34} = 3 \pm \sqrt{3} \Rightarrow f''(x) = x(x-(3+\sqrt{3}))(x-(3-\sqrt{3}))e^{-x}$

=> ZW bei x_3 von - auf +, bei x_4 von + auf -

=> TrP(0 | 0), $W_2(3-\sqrt{3} \mid (30\sqrt{3} + 54)e^{-\sqrt{3}-3)} =$ $\mathbf{W_2(4.723| 0.9335);}$

$W_3(3+\sqrt{3} \mid (54 - 30\sqrt{3})e^{\sqrt{3}-3)} =$ $\mathbf{W_3(1.2679\ 0.57364)}$

4. As: $x \to \infty$: $\mathbf{y = 0}$; $x \to -\infty$: $\mathbf{y = e^{-x}}$

(-1 | -e), (4 | 1.17), (1 | 0.368), (-2 | -1.108)

b) $P(1 \mid 1/e) = P(1 \mid 0.36788)$; $f'(1) = 2/e \Rightarrow m_n = -e/2 = (y - 1/e)/(x - 1)$

=> n: $y = -e/2 \cdot x + e/2 + 1/e$;

$n \cap$ x-Achse: => $\mathbf{x} = (e^2 + 2)/2e\cdot(2/e) = \mathbf{(e^2 + 2)/e^2 = 1 + 2/e^2}$

c) $F'(x) = (3ax^2 + 2bx + c)e^{-x} - (ax^3 + bx^2 + cx + d)\cdot e^{-x}$

$= (-ax^3 + (3a - b)x^2 + (2b - c)x + (c - d))e^{-x}$

=> $\mathbf{a = -1 \Rightarrow b = -3 \Rightarrow c = -6 \Rightarrow d = -6 \Rightarrow F(x) = (-x^3 - 3x^2 - 6x - 6)e^{-x}}$

$\mathbf{A} = \lim_{k\to\infty} \int_0^k f(x)dx = \lim_{k\to\infty} [F(x)]_0^k = \lim_{k\to\infty} ((-k^3 - 3k^2 - 6k - 6)e^{-k} + 6) = \mathbf{6}$

5. $K_1: (x+7)^2 + (y+7)^2 = 8$; $M_1(-7|-7)$, $r_1 = 2\sqrt{2}$ $K_2: (x-14)^2 + (y+2)^2 = 50$

Gesucht: $M(u|v)$, r t Tangente: $\overline{Mt} = r \Rightarrow$ $(u - v + 10)/\sqrt{2} = +r$

(´+´ , denn O und M liegen auf derselben Seite von t und $HNF_t(O) = +10/\sqrt{2}$)

K_1 von aussen ber.: $(u+7)^2 + (v+7)^2 = (r+2\sqrt{2})^2$

K_2 von aussen ber.: $(u-14)^2 + (v+2)^2 = (r+5\sqrt{2})^2$

II – III: $42u + 10v - 60 = -6\sqrt{2}r$ $|\cdot 1$

I: $u - v + 10 = \sqrt{2}r$ $|\cdot 6$

$\Rightarrow$ $48u + 4v = 0 \Rightarrow v = -12u$

v in I: $u + 12u + 10 = \sqrt{2}r \Rightarrow r = (13u + 10)/\sqrt{2}$

v, r in II: $(u+7)^2 + (-12u+7)^2 = ((13u+10)/\sqrt{2} + 2\sqrt{2})^2 = (13u+14)^2/2$ $|\cdot 2$

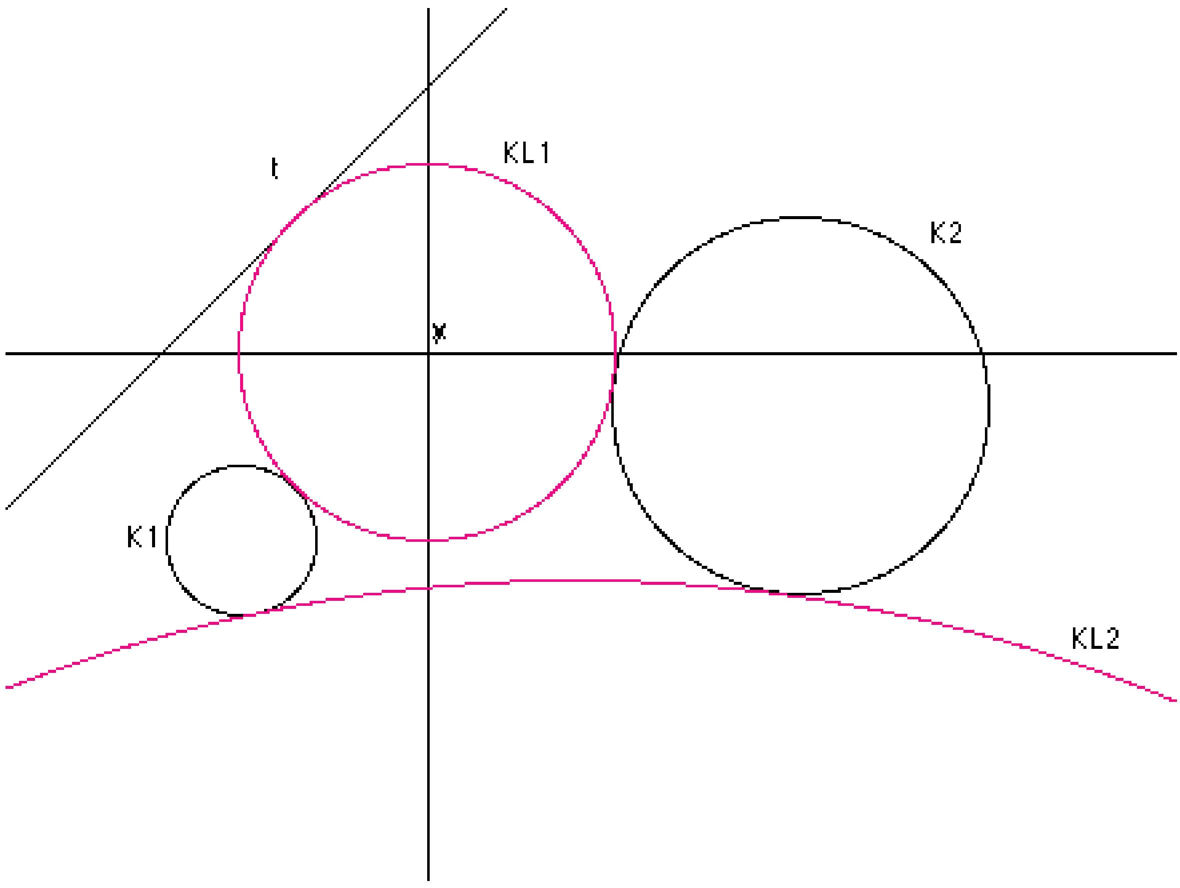
$\Rightarrow$ $290u^2 - 308u + 196 = 169u^2 + 364u + 196$

$\Rightarrow$ $121u^2 - 672u = 0 \Rightarrow u_1 = 0,\ u_2 = 672/121$

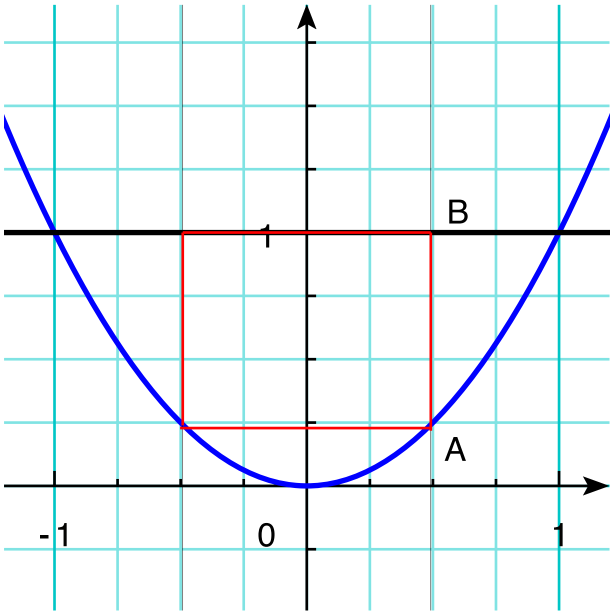
$u_1 = v_1 = 0$, $r_1 = 5\sqrt{2}$; $u_2 = 672/121$, $v_2 = -8084/121$; $r_2 = 9946/121\sqrt{2} = 4973\sqrt{2}/121$

($u_2 = 5.5537$, $v_2 = -66.645$, $r_2 = 58.123$)

K_1: $x^2 + y^2 = 50$; K_2: $(x - 5.554)^2 + (y + 66.64)^2 = 58.12^2 = 3378.28$



6.



a) $A(a/2 \mid a^2/4)$ $B(a/2 \mid 1)$;

$\overline{AB} = a = 1 - a^2/4$

$\Rightarrow\ a^2 + 4a - 4 = 0$

$\Rightarrow$ **$a = 2(\sqrt{2} - 1) = 0.8284$**

$F(G) = 2 \cdot {}_0\int^1 (1-x^2)dx = 4/3$;

$F(Q) = 4(3 - 2\sqrt{2})$, $F(G) : F(Q)$

$= 1 : 3(3-2\sqrt{2}) = 1 : 0.5147$

b) $V(G) = \pi \cdot {}_0\int^1 x^2 dy = \pi \cdot {}_0\int^1 y \cdot dy = \pi/2$

$V(Q) = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot (a/2)^2 \cdot a = \pi a^3/4$

$8\pi(5\sqrt{2}-7)/4 = 0.1421\pi$

$V(G) : V(Q) = 1 : 4(5\sqrt{2} - 7)$

$= 1 : 0.2843$

c) $V(a) = \pi \cdot (a/2)^2 (1 - a^2/4) = \pi/4 \cdot (a^2 - a^4/4)$, $V'(a) = \pi/4 \cdot (2a - a^3) = 0$

$\Rightarrow a_1 = 0$, $a_2 = \sqrt{2}$, Max klar: $V(0) = V(2) = 0$, $V(a) > 0$ in $]0, 2[$;

$\Rightarrow$ **$V_{max} = V(\sqrt{2}) = \pi/4 = 0.78540$**

oder: $A(x|x^2)$, $V(x) = \pi(x^2 - x^4)$, $V'(x) = 0 \Rightarrow x = 1/\sqrt{2}$, $V_{max} = \pi(1/\sqrt{2})^2(1-0.5) = \pi/4$

7. a) $P(10\text{ g.F.}) = 40/50 \cdot 39/49 \cdot 38/48 \cdot \ldots \cdot 31/41 = 0.082519 = \binom{40}{10} : \binom{50}{10}$

$P(\ 9\text{ g.F.}) = 10/50 \cdot 40/49 \cdot 39/48 \cdot \ldots \cdot 32/41 = 0.026619 = \binom{40}{9} \cdot \binom{10}{1} : \binom{50}{10}$

$P(\ 8\text{ g.F.}) = 10/50 \cdot\ \ 9/49 \cdot 40/48 \cdot \ldots \cdot 33/41 = 0.007487 = \binom{40}{8} \cdot \binom{10}{2} : \binom{50}{10}$

$(10,9,8) = (40 \cdot 39 \cdot \ldots \cdot 33)/(50 \cdot 49 \cdot \ldots \cdot 41) \cdot (32 \cdot 31 + 10 \cdot 32 + 10 \cdot 9) =$ **0.116625**

b) $x^3 - x^2 + 5x + 2 = x(4 + 2 + 1 + \ldots) = 8x \Rightarrow x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_1 \mid 2$, $(x_1 - 1) \mid -1$

$\Rightarrow x_1 = 2$; $(x^3 - x^2 - 3x + 2):(x - 2) = x^2 + x - 1$; $\Rightarrow$ **$x_1 = 2$, $x_{23} = (-1 \pm \sqrt{5})/2$**

c) $y' = -2\sin x - 2\cos(2x) = -2\sin x - 2(1 - 2\sin^2 x) = 0 \Rightarrow 2s^2 - s - 1 = 0 \Rightarrow s_{12} = (1 \pm 3)/4$;

$s_1 = 1 \Rightarrow x = \pi/2 = 1.571$; $s_2 = -0.5 \Rightarrow x_2 = 7\pi/6 = 3.665$, $x_3 = 11\pi/6 = 5.760$

$\Rightarrow$ **$x = \pi/2 + 2k\pi$ oder $7\pi/6 + 2k\pi$ oder $11\pi/6 + 2k\pi$**