Matur 4

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner
Zeit: 4 Stunden

1. Gegeben: $f(x) = \dfrac{x^3}{a \cdot (x-2)^2}$; $a \in \mathbb{R}$

a) Bestimme die Koordinaten des Extrempunktes von f.

Im Folgenden sei a = 6.

b) Diskutiere f.

c) Bestimme die Koordinaten aller Schnittpunkte des Graphen mit der Tangente in P(1|...).

2. Gegeben sind die Punkte A(-3 | 0 | 2), B(2 | 4 | 5), C(-2 | 4 | 1), S(6 | 0 | 0).

a) Gib je eine Gleichung der Geraden g = (AB) und der Ebene E(ABC).

b) Bestimme die Fläche F des Dreicks ABC sowie den Winkel $\alpha = \sphericalangle(CAB)$.

c) Berechne den Winkel δ zwischen g und π_1, den Winkel φ zwischen E und π_1 sowie das Volumen V der Pyramide ABCS.

d) Spiegle S an E.

3. Ein Quader ist einer Halbkugel mit Radius r = 1 einbeschrieben. Die Seiten der Quadergrundfläche verhalten sich wie 1 : 2. Bestimme die Quaderkanten so, dass a) das Volumen, b) die Oberfläche des Quaders maximal ist (Resultate auf 4 signifikante Ziffern runden).

4. a) Zeichne den Graphen von $f(x) = e^x \cdot \cos x$ mit $D_f = [-4 ; 2]$.
Bestimme Nullstellen, Extrema, Wendepunkte.

b) Eine Stammfunktion von f hat die Form $F(x) = a \cdot e^x \cdot (\sin x + \cos x)$. Die Fläche, welche vom Graphen von f und der x-Achse zwischen $-\pi/2$ und $\pi/2$ eingeschlossen ist, heisst A. In welchem Verhältnis (1 : ?) teilt die Kurvennormale im Punkt W(0 | ...) die Fläche A? (4 sign. Ziffern)

5. a) In der Klasse 6x (10 Damen, 8 Herren, dabei auch Romeo und Julia) werden Gutscheine für einen Tanzkurs ausgelost: drei für eine Dame und drei für einen Herrn. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zählen Romeo und Julia zu den Glücklichen ?

b) Theoretische Fahrprüfung: Von 50 Fragen werden 10 ausgelost, davon müssen mindestens 8 richtig beantwortet werden. Regula hat nur 40 der 50 Fragen gelernt und geht trotzdem an die Prüfung. Wie gross sind die Chancen, dass ihr mindestens 8 der gelernten Fragen gestellt werden?

c) Laut Statistik von "EasyFly" erscheinen jeweils 4% der angemeldeten Passagiere nicht zum Check-in. Darum reserviert die Airline 80 Plätze für ein Flugzeug, das lediglich 77 Plätze hat. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Passagiere mit Reservation zurückgewiesen werden müssen ?

6. Gegeben: Kreis K_1: $(x-10)^2+(y-3)^2=25$, Kreis K_2: $x^2+y^2+14x+6y-42=0$, Gerade t: $x=-3$.

a) Bestimme Mittelpunkt und Radius aller Kreise, welche K_1 und K_2 von aussen berühren und t als Tangente haben.

b) Ermittle den Berührpunkt eines gesuchten Kreises mit K_1.

7. a) Fachwoche 5b, 2001, Davos: Die Punkte A und B liegen je 1559.83 müM, der Vorgipfel des Jakobshornes sei S, die Normalprojektion von S auf die Horizontalebene durch A sei S´. Gruppe1 misst: $\overline{AB}=134.13$m, $\alpha=\sphericalangle(BAS')=102.726°$, $\varphi=\sphericalangle(S'AS)=13.378°$, $\beta=\sphericalangle(ABS')=75.312°$. Welche Höhenabgabe sollte also beim Punkt S auf der Karte stehen? (auf ganze Meter runden)

b) Löse: $\log_2(2\cdot\sin(x))-\log_4(9\cdot\cos^2(x))=\log_\pi(e^0)$; $x\in[0;2\pi]$

c) Im Dreieck ABC gilt: $\overline{AC}=10$, $\overline{BC}=5$, $\gamma=90°$. Von C wird das Lot auf AB gefällt => P_1. Weiter: Lot von P_1 auf AC => P_2, Lot von P_2 auf AB => P_3, Lot von P_3 auf AC => P_4 etc. Wie lang ist der Weg von C über P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 ... bis A ?

Matur 4: Lösungen

1. a) $f'(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2}{a \cdot (x-2)^3}$, kein Zeichenwechsel bei $x_1 = 0$ => kein Extremum
Zeichenwechsel bei $x_2 = 6$ => **E(6 | 27/2a)**

oder: $f'(x) = \dfrac{24x}{a(x-2)^4}$;$f'(6) = \dfrac{9}{16a} \neq 0$;$f'(0) = 0$ etc

b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2}{6 \cdot (x-2)^3}$;$f'(x) = \dfrac{4x}{(x-2)^4}$ $\left(;f''(x) = \dfrac{-4(3x+2)}{(x-2)^5} \right)$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, Pol bei $x = 2$, Nullstelle: $x_1 = 0$,

Extrema: siehe a) f´ wechelt Zeichen bei $x_2 = 6$ von - auf + => **T(6 |9/4)**

(oder f´´(6) = 3/32 ...)

Wendepunkte: $x_3 = 0$, f´´ wechelt Zeichen bei $x_1 = 0$ von - aif +,

f´(0) = 0 => **TP(0 | 0)**

$f(x) = 1/6 \cdot (x + 4 + 16(x-1)/(x-2)^2)$ => **A(x) = x/6 + 2/3; vert As.: x = 2**

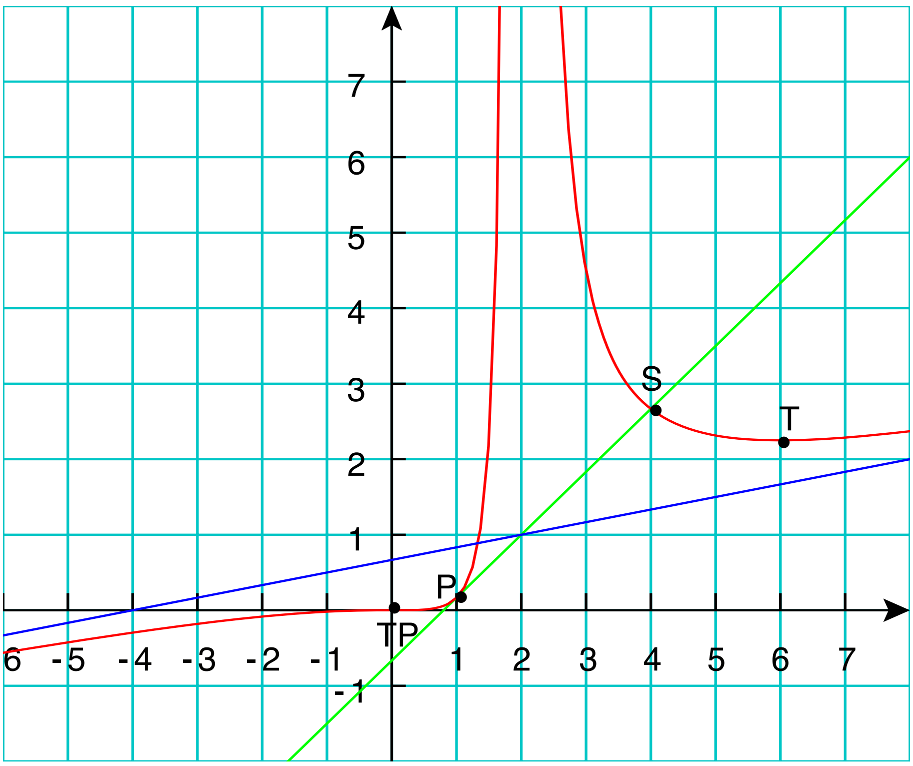
Weitere Punkte:(-3|-9/50), (-1|0.019), (1|1/6), (1.5/2.25),(2.2|10.4).(3|4.5), (4|2.66),(5|2.31),(7|2.28)

c) P(1 | 1/6), f´(1) = 5/6 = (y-1/6)/(x-1) => t: y = 5x/6 - 2/3

$G_f \cap t$: $x^3 = 5x(x-2)^2 - 4(x-2)^2 = 5x^3 - 4x^2 - 20x^2 + 16x + 20x - 16$

x = 1 ist Doppellösung => $(x^3 - 6x^2 + 9x - 4):(x^2 - 2x + 1) = x - 4$

=> einzger weiterer SP: **S(4| 8/3)**



2. a) g: $\vec{r} = \overrightarrow{OA} + t\cdot\overrightarrow{AB}$

g: $\vec{r}$ = (-3 | 0 | 2) + t·(5 | 4 | 3)

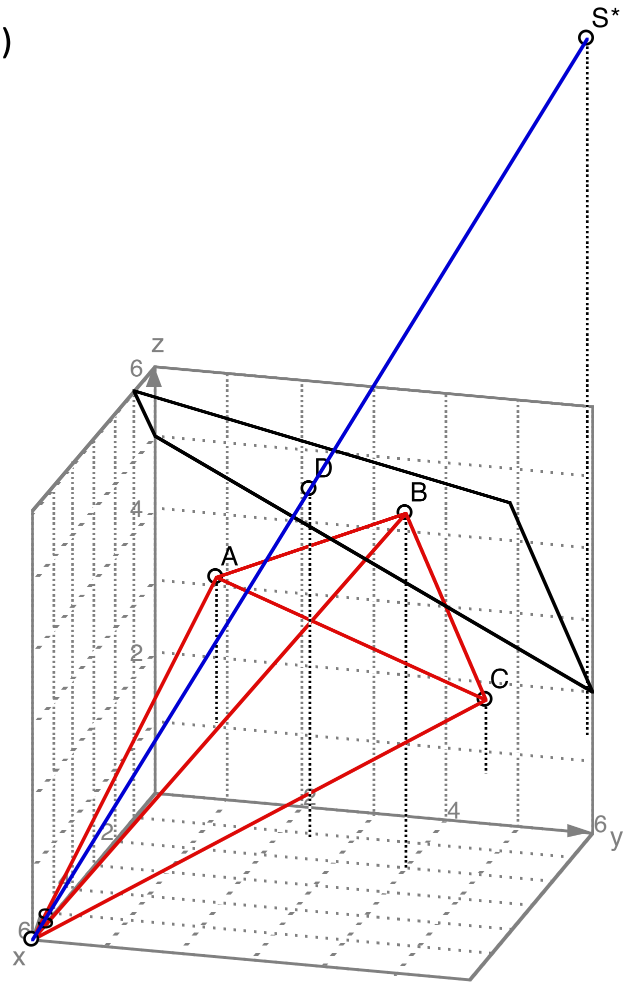
$\vec{n}_E \approx \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (5|4|3)\times(1|4|-1)$

$= (-16 \mid 8 \mid 16\ ),\ \vec{n}_E = (2 \mid -1 \mid -2\ )$

E: $2x - y - 2z + D = 0$

$A \in E \Rightarrow D = 10$

E: 2x – y – 2z + 10 = 0



b) **F** = $0.5\cdot|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$ = **12**

$\cos\alpha = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}/(\overline{AB} \cdot \overline{AC})$

$= 18/(5\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}) = 3/5$

=> **α = 53.13°**

c) $\sin\delta = |\overrightarrow{AB} \cdot (0|0|1)|/(AB\cdot 1)$

= 3/(5√2 => **δ = 25.10°**

$\cos\varphi = |\vec{n}_E\cdot\vec{n}_1|/(n_E\cdot n_1) = 2/3$

=> **φ = 48.19°**

HNF_E: $1/3 \cdot (2x - y - 2z + 10\ ) = 0$

h : Abstand S,E

h = |(12 + 10)/3 = 22/3

V = 1/3 · 12 · 22/3 = **88/3 = 29.33**

d) Lot l von S auf E:

l: $\vec{r} = \overrightarrow{OS} + t\cdot\vec{n}_E = (6|0|0) + t\cdot(2|-1|-2)$

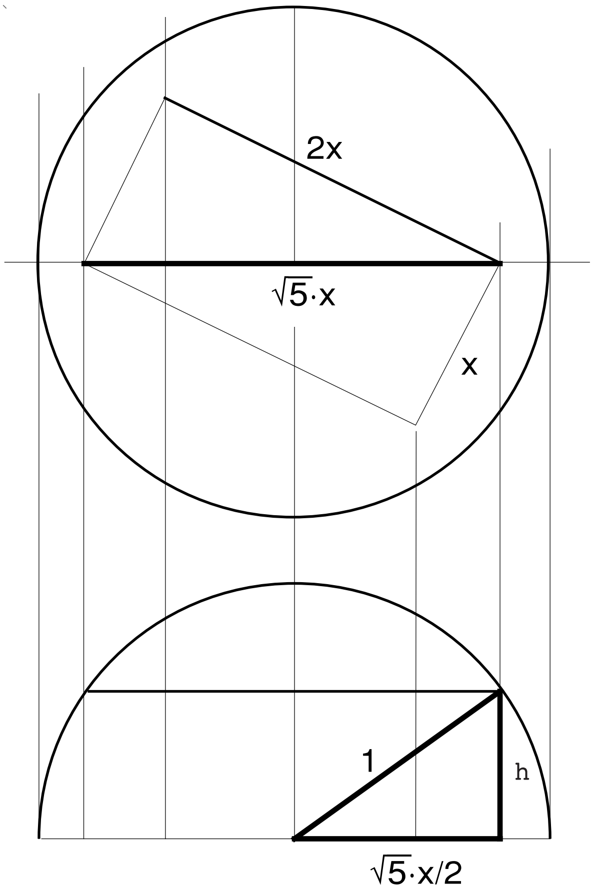
$l \cap E$: 2(6 + 2t) + t + 2·2t + 10 = 0; t = –22/9

=> D(10/9 | 22/9 | 44/9 |

$\overrightarrow{OS}^* = \overrightarrow{OS} + 2\cdot\overrightarrow{SD} = (6|0|0) + 2\cdot((-44/9 \mid 22/9 \mid 44/9\ )$

=> **S*(–34/9 | 44/9 | 88/9) = S*(3.778 | 4.889 | 9.778)**

3.



a) $V = 2x^2 \cdot h;\ x \in [0\ ;\ 2/\sqrt{5}\,]$

$h = \sqrt{1 - 5/4 \cdot x^2}$

$V(x) = 2x^2 \cdot \sqrt{1 - 5/4 \cdot x^2} = x^2 \cdot \sqrt{4 - 5x^2}$

$\overline{V}(x) = (V(x))^2 = 4x^4 - 5x^6$

$\overline{V}'(x) = 16x^3 - 30x^5 = 2x^3(8 - 15x^2)$

$\overline{V}'(x) = 0 \Rightarrow \ldots\ x = +\sqrt{8/15}$

($x = 0 \Rightarrow V = 0$, Max. aus geom. Gründen)

=> Kanten: $\mathbf{2\sqrt{2/15},\ 4\sqrt{2/15},\ \sqrt{3}/3}$

= 0.7303 ; 1.461 ; 0.5774

b) $O = 2(2x^2 + xh + 2xh)$

$O(x) = 4x^2 + 6x \cdot \sqrt{1 - 5/4 \cdot x^2}$

$\qquad = 4x^2 + 3x \cdot \sqrt{4 - 5x^2}$

$O'(x) = 8x + 3 \cdot \sqrt{4 - 5x^2}$

$\qquad + 3x \cdot (-10x)/(2 \cdot \sqrt{4 - 5x^2}\,)$

$= 8x + 3 \cdot \sqrt{4 - 5x^2} - 15x^2/\sqrt{4 - 5x^2} = 0$

$\Rightarrow 8x \cdot \sqrt{4 - 5x^2} + 12 - 15x^2 - 15x^2 = 0$

$\Rightarrow 4x \cdot \sqrt{4 - 5x^2} = 15x^2 - 6$ | quadr.

$\Rightarrow 64x^2 - 80x^4 = 225x^4 - 180x^2 + 36$

$\Rightarrow 305x^4 - 244x^2 + 36 = 0$

$\Rightarrow x^2 = (122 \pm 8\sqrt{61})/305$

$\Rightarrow x_{12} = \pm\, 0.77773,\ x_{34} = \pm\, 0.4417$ Probe $\Rightarrow x_1 = 0.7777,\ x_2 = -0.4417$

=>Kanten: **0.7777 ; 1.5555 ; 0.4939**

oder: a) $x^2 = 4/5 \cdot (1 - h^2)$; $V(h) = 8/5 \cdot (h - h^3)$; $V'(h) = 8/5 \cdot (1 - 3h^2)\ 0 \Rightarrow h = 1/\sqrt{3}$

b) $O = 4x^2 + 6xh = 16/5 \cdot (1 - h^2) + 12h/5 \cdot \sqrt{1 - h^2} = O(h)$

$O'(h) = -32h/5 + 12/\sqrt{|5} \cdot \sqrt{1 - h^2} - 12h^2/(\sqrt{5} \cdot \sqrt{1 - h^2}\,) = 0$

$\Rightarrow -8h \cdot \sqrt{1 - h^2} = -6 \cdot \sqrt{5} \cdot h^2 + 3 \cdot \sqrt{5} \Rightarrow 244h^4 - 244h^2 + 45 = 0$ etc.

4. a) $f'(x) = e^x(\cos x - \sin x)$,

$f''(x) = -2\,e^x \sin x$

Nullstellen: $\mathbf{x_{12} = \pm\pi/2}$,

Extrema: $\tan x = 1 \Rightarrow \pi/4 + k\pi$

$\Rightarrow \mathbf{x_3 = -3\pi/4} = -2.356$,

$\mathbf{x_4 = \pi/4} = 0.7854$

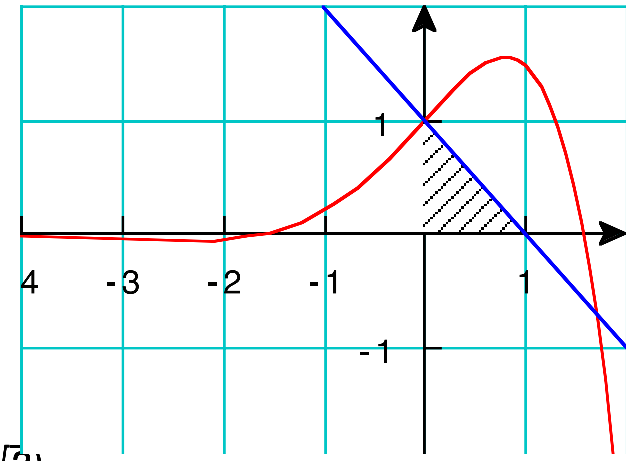
$f''(x_3) > 0$

$\Rightarrow \mathbf{T(-3\pi/4 \mid \exp(-3\pi/4)\cdot\sqrt{2})}$

$= T(-2.356 \mid -0.06702)$

$f''(x_4)\,' < 0 \Rightarrow \mathbf{H(\pi/4 \mid \exp(\pi/4)\cdot\sqrt{2})}$

$= H(0.7854 \mid 1.551)$



Wendepunkte: $\sin x = 0 \Rightarrow x_5 = -\pi$, $x_6 = 0$, Zeichenwechsel $\Rightarrow$

$\mathbf{W_1(-\pi \mid -e^{-\pi})} = W_1(-3.142 \mid -0.04321)$, $\mathbf{W_2(0 \mid 1)}$

b) $F'(x) = a\cdot e^x(\sin x + \cos x) + a\cdot e^x(\cos x - \sin x)) = 2a\cdot e^x\cdot\cos x \Rightarrow a = 0.5.$

$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)dx = [0.5e^x(\sin x + \cos x)]_{-\pi/2}^{\pi/2}$

$= 0.5(e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}(-1)) = 0.5((e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}) = \mathbf{2.5092}$

$f'(0) = 1 \Rightarrow m_n = -1 \Rightarrow \mathbf{n: y = -x + 1}$;

$A^* = \int_{-\pi/2}^{0} f(x)dx = [0.5e^x(\sin x + \cos x)]_{-\pi/2}^{0} = 0.5(1 - e^{-\pi/2}(-1))$

$= 0.5((1 + e^{-\pi/2}) = 0.60394 \Rightarrow A(\text{links}) = A^* + 0.5 = \mathbf{1.10394}$

$A(\text{links}) : A(\text{rechts}) = \mathbf{1 : 1.273} = 0.7856 : 1$

5. a) D: $g = \binom{9}{2}$, $m = \binom{10}{3}$, H: $g = \binom{7}{2}$, $m = \binom{8}{3}$

$\Rightarrow P = P_D\cdot P_H = \binom{9}{2}\cdot\binom{7}{2} : \{\binom{10}{3}\cdot\binom{8}{3}\}$

$= (9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot2\cdot3\cdot2\cdot3)/(2\cdot2\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6) = \mathbf{9/80 = 0.1125}$

oder: $P = (1 - 9/10 \cdot 8/9 \cdot 7/8)\cdot(1 - 7/8 \cdot 6/7 \cdot 5/6) = 3/10 \cdot 3/8$ ...

b) $P(10\text{ g.F.}) = 40/50 \cdot 39/49 \cdot 38/48 \cdot \ldots \cdot 31/41 \cdot \binom{10}{0} = 0.082519$

$P(\ 9\text{ g.F.}) = 10/50 \cdot 40/49 \cdot 39/48 \cdot \ldots \cdot 32/41 \cdot \binom{10}{1} = 0.26619$

$P(\ 8\text{ g.F.}) = 10/50 \cdot\ \ 9/49 \cdot 40/48 \cdot \ldots \cdot 33/41 \cdot \binom{10}{2} = 0.33692$

$P(10\text{ od.}9\text{ od.}8) = 0.082519 + 0.26619 + 0.33692 = \mathbf{0.6856}$

oder: $g = \binom{40}{10} + \binom{40}{9}\cdot\binom{10}{1} + \binom{40}{8}\cdot\binom{10}{2}$; $m = \binom{50}{10}$ .....

c) $P(80\text{ kommen}) = 0.96^{80} = 0.0381679$

$P(79) = 80\cdot(0.96^{79}\cdot 0.04) = 0.1272264$

$P(78) = \binom{80}{2}\cdot(0.96^{78} \cdot 0.04^2) = 3160 \cdot () = 0.2093935$

$\Rightarrow$ **P(zuwenig Platz) = 0.3748**

6. a) $M_1(10 \mid 3)$, $r_1 = 5$, K_2: $(x+7)^2 + (y+3)^2 = 100$; $M_2(-7 \mid -3)$, r_2 10

Ansatz für t: HNF(t): $x - 3 = 0$. Ges: k: $M(u|v)$, r

I: $\overline{Mt} = r \Rightarrow \pm r = u + 3$; zuerst + wählen und einsetzten:

II: $\overline{MM_1} = r + r_1 \Rightarrow (u-10)^2 + (v-3)^2 = (u+8)^2$

III: $\overline{MM_2} = r + r_2 \Rightarrow (u+7)^2 + (v+3)^2 = (u+13)^2$

II: $-36u + v^2 - 6v = -45$; III: $-12u + v^2 + 6v = 111$

$-II + 3III \Rightarrow 2v^2 + 12v - 189 = 0 \Rightarrow v = 9,\ v_2^* = -21$

=> **M(2 | 9), r = 5; M*(17 | -21), r* = 20**

I: $\overline{Mt} = r \Rightarrow \pm r = u + 3$, jetzt - wählen und einsetzten: $r = -u - 3$

II: $\overline{MM_1} = r + r_1$

$\Rightarrow (u-10)^2 + (v-3)^2 = (-u+2)^2$

III: $\overline{MM_2} = r + r_2$

$\Rightarrow (u+7)^2 + (v+3)^2 = (-u+7)^2$

II: $-16u + v^2 - 6v = -105$;

III: $28u + v^2 + 6v = -9$

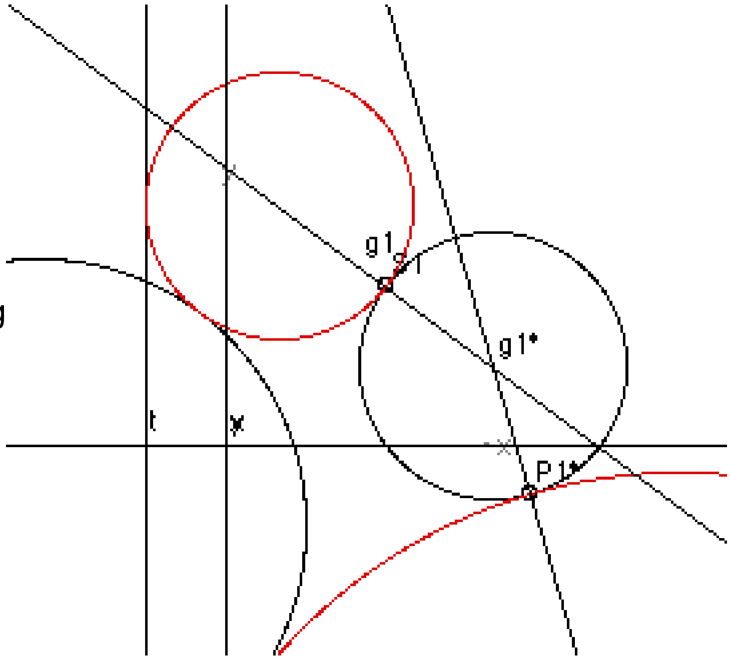
$7II + 4III \Rightarrow 11v^2 - 14v + 771 = 0$

=> D<0, keine weitere Lösung

oder: am KS überlegen:

t wird von rechts berührt

$\Rightarrow r = u + 3$



b) $g1 = (M_1M)$:

$m = (9-3)/(2-10) = -3/4$

$= (y-9)/(x-2)$

$\Rightarrow g1: y = -3/4\,x + 21/2$

$g1 \cap K_1$: $(x-10)^2 + (-3/4\,x + 21/2 - 3)^2 = 25$

$\Rightarrow (x-10)^2 = 16.\ x_1 = 6,\ x_2 = 14$

Skizze => $\mathbf{S_1(6 \mid 6)}$

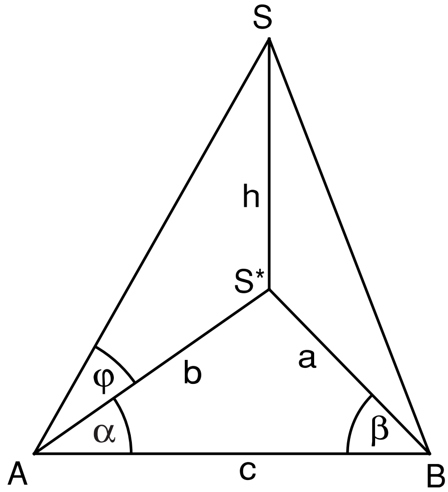
oder: $g1^* = (M_1M^*)$: $m = (-21-3)/(17-10) = -24/7 = (y-3)/(x-10)$

$\Rightarrow g1^*$: $y = -24/7\,x + 261/7$

$g1^* \cap K_1$: $(x-10)^2 + (-24/7\,x + 261/7 - 3)^2 = 25 \Rightarrow (x-10)^2 = 49/25$; $x_1 = 11.4$, $x_2 = 8.6$

Skizze => $\mathbf{S_1(11.4 \mid -1.8)}$

7. a)



$b = c \cdot \sin\beta / \sin(180° - \alpha - \beta)$ (= 1.962°)

$= c \cdot \sin\beta / \sin(\alpha + \beta)$ (= 3789.70)

$h = b \cdot \tan\varphi = c \cdot \sin\beta \cdot \tan\varphi / \sin(\alpha + \beta)$

= 901.297

=> H = 1559.83 + 901.297

= **2461 müM**

b) $\log_2(2 \cdot \sin(x)) = \log_4(2 \cdot \sin(x)) / \log_4 2 = 2 \cdot \log_4(2 \cdot \sin(x)) = \log_4(4 \cdot \sin^2(x))$

$\log_\pi(e^0) = 0 \Rightarrow 4 \cdot \sin^2 x = 9 \cdot \cos^2 x \Rightarrow \tan^2 x = 9/4 \Rightarrow \tan x = \pm 1.5$

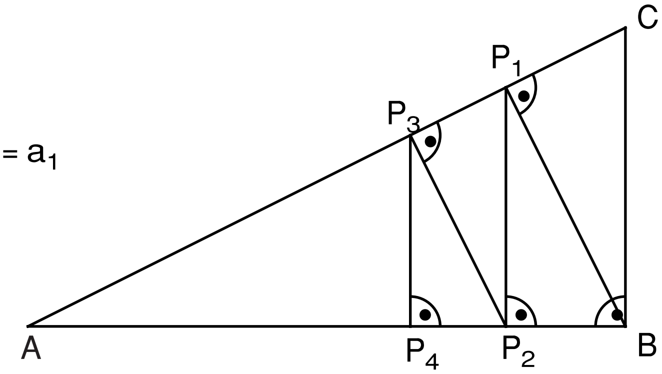
oder: $\log_4(9\cos^2(x)) = \log_2(9\cos^2(x))/0.5 = \log_2(|3\cos(x)|)$

$\Rightarrow \log_2(2 \cdot \sin(x)/|3\cos(x)|) = \log_2(3/2 \cdot |\tan(x)|) = 0$ etc.

$\Rightarrow x_1 = 0.9828$, $x_2 = x_1 + \pi = 4.1243$, $x_3 = 2.1588$, $x_4 = x_3 + \pi = 5.3004$

Probe (Argument von logx muss pos. sein) **$x_1 = 0.9828$; $x_3 = 2.1588$**

c) $\overline{AB} = 5 \cdot \sqrt{5}$, $\Delta ABC \equiv \Delta CBP_1$



$\overline{CP_1}$: $x : 5 = 10 : 5 \cdot \sqrt{5}$

$\Rightarrow \overline{CP_1} = x = 10/\sqrt{5} = 10 \cdot 1/\sqrt{5} = a_1$

$\overline{P_1P_2}$: $x : 10/\sqrt{5} = 10 : 5 \cdot \sqrt{5}$

$\Rightarrow \overline{P_1P_2} = x = 4 = 5 \cdot (2/\sqrt{5})^2 = a_2$

$\overline{P_2P_3}$: $x : 4 = 10 : 5 \cdot \sqrt{5}$

$\Rightarrow \overline{P_2P_3} = x = 8/\sqrt{5}$

$= 5 \cdot (2/\sqrt{5})^3 = a_3$ etc. .

g,F.: $a_1 = 10/\sqrt{5}$, $q = a_2/a_1 = a_3/a_2 = 2/\sqrt{5} \Rightarrow$

$s = \overline{CP_1P_2...A} = 10/\sqrt{5} \cdot 1/(1 - 2/\sqrt{5}) = 10/(\sqrt{5} - 2)$

$= 10 \cdot (\sqrt{5} + 2) = 20 + 10 \cdot \sqrt{5} = 42.36$

=> Gesamtweg = $20 + 10 \cdot \sqrt{5} + \overline{BC} =$ **$25 + 10 \cdot \sqrt{5} = 47.36$**

oder: alle vorkommenden Dreiecke sind ähnlich (ww)

$\overline{BC} = 5 = a_1$; $\overline{BP_1} : a_1 = 10 : 5 \cdot \sqrt{5} = 5 \cdot 2/\sqrt{5} = a_1 \cdot 2/\sqrt{5} = a_2$;

$\overline{P_1P_2} : a_2 = 10 : 5 \cdot \sqrt{5} = 5 \cdot 2/\sqrt{5} = a_2 \cdot 2/\sqrt{5} = a_3$ etc.

=> g.F mit a_1 0 5, $q = 2/\sqrt{5}$, $s = 5/(1 - 2/\sqrt{5}) = 5\sqrt{5}/(\sqrt{5} - 2) =$ **$25 + 10\sqrt{5}$**