Matur 5

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

Zeit: 4 Stunden

1. a) Diskutiere $f(x) = (x^2 - 3x + 2):x^2$ (LE für G_f : 2H)

b) Berechne die endliche Fläche zwischen G_f und x-Achse.

c) Die Tangente in der linken Nullstelle von f schneidet G_f nochmals. Wo?

2. Zwei Raumschiffe RS1 und RS2 nähern sich mit konstanten Geschwindigkeiten auf ihren geradlinigen Bahnen. In einem geeignet gewählten Koordinatensystem ist RS1 zur Zeit $t = 0$ im Punkt A1(0 | 0 | 0), zur Zeit $t = 5$ im Punkt B1(-10 | 15 | 20). A2(61 | -11 | -46) und B2(41 | -6 | -31) sind die entsprechenden Punkte bei RS2. Die Zeiteinheit ist Sekunden, die Längeneinheit ist Kilometer.

a) Bestimme die Geschwindigkeiten der beiden Raumschiffe.

b) Zu welchem Zeitpunkt ist RS2 dem Ursprung am nächsten?

c) Wie gross ist der minimale Abstand der beiden Flugrouten?

d) Wie gross ist der minimale Abstand der beiden Raumschiffe?

e) Um welchen Faktor müsste die Geschwindigkeit von RS2 verändert werden, damit - bei gleichen Flugrouten und gleichem Punkt A2 - die minimalen Abstände aus Aufgabe c) und d) übereinstimmen?

3. a) Zeichne die Kurve k: $y = 2x \cdot e^{1-x}$ für $-1 \leqslant x \leqslant 8$ und bestimme Extrem- und Wendepunkte.

b) Wie lautet die Gleichung der n-ten Ableitung von y ? (ohne Beweis)

c) Bestimme die Fläche, die von der x-Achse sowie von Tangente und Normale von k im Punkt P(2 | ...) eingeschlossen wird (exakt).

d) Wie gross ist die ins Unendliche reichende Fläche zwischen k und der x-Achse im 1. Quadranten ?

4. Einer Kugel mit Radius 1 ist ein dreiseitiges Prisma (Toblerone) mit regulärer Grundfläche einbeschrieben. Bestimme die Grundkante a und die Höhe h, wenn a) das Volumen b) die Oberfläche maximal sein soll .

5. Gegeben sind die Punkte A(1 | 4 | -6) und B(7 | -2 | -3).

a) Unter welchem Winkel erscheint die Strecke AB von C(3 | 2 | 0) aus ?

b) Berechne das Volumen der Pyramide mit der Spitze in O(0 | 0 | 0) und den weiteren Ecken A, B und C.

c) Zeige, dass die Menge aller Punkte P(x , y , z) mit $\overline{PA} = 2 \cdot \overline{PB}$ eine Kugel ist und gib Mittelpunkt und Radius an.

d) Gib eine Gleichung der Geraden g = (AB) an. Spiegle dann g an π_1 (–> g*) und bestimme den Durchstosspunkt von g* durch π_2.

6. Kurzaufgaben:

a) Beweise die Formel für das Volumen des geraden Kreiskegelstumpfes!

b) Löse das System: $\log_{10} x + 2 \cdot \log_{100} y = 1$ und $x - y = 3$

c) Die vierten Potenzen der Sinuswerte der Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks bilden eine arithmetische Folge. Wie gross sind die Winkel ?

7. a) Bei jedem der 6 unabhängigen Lichtsignale auf der Strecke von A nach B dauern die Phasen grün, gelb, rot, gelb, grün,.. jeweis 20, 10, 20, 10, 20, .. Sekunden. Anna fährt von A nach B. Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss sie α) mindestens 1 mal β) höchstens 3 mal anhalten ?

b) Candide bereitet für eine Prüfung 10 Spickzettel für 10 verschiedene Fragen vor. In der Prüfung zieht er bei einer Frage α) mit β) ohne Zurücklegen solange einen Zettel, bis er den richtigen gezogen hat. Wie stehen die Chancen, dass er spätestens beim 5. Zettel Erfolg hat?

c) Ein Stapel besteht aus 25 roten und 25 schwarzen Karten. Es wird drei mal eine Karte gezogen; ist sie rot, so kommt sie in den Stapel zurück, ist sie schwarz, bleibt sie draussen und es wird eine neue rote Karte in den Stapel geschoben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird höchstens einmal eine rote Karte gezogen?

Matur 5

1. a) $f'(x) = (3x - 4)/x^3$;

$f''(x) = (-6x + 12)/x^4$

1\. $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

N: $x^2 - 3x + 3 = (x - 2)(x - 1)$

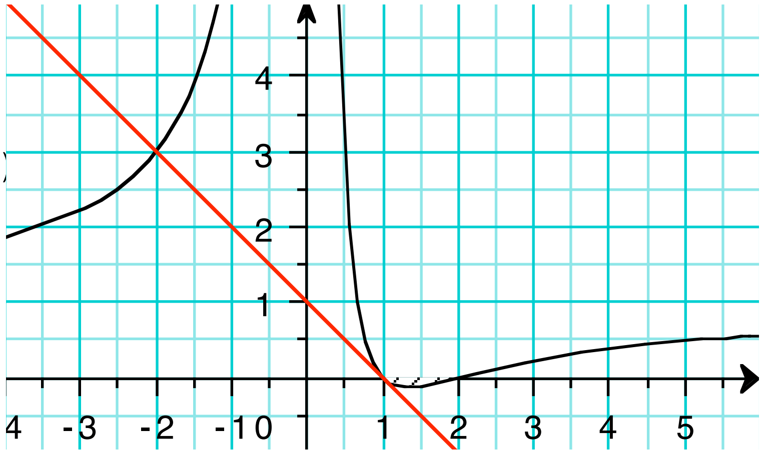
=> $x_1 = 1$, $x_2 = 2$;

Pol bei $x_3 = 0$

2\. $f'(x) = 0$ => $x_4 = 4/3$,

$f''(4/3) = 4:(4/3)^4 = 1.2656$

=> **T(4/3 | -1/8)**



3\. $f''(x) = 0$ => $x_2 = 2$,

f'' wechselt bie x_2 zeichen von + auf - => **W(2 | 0)**

4\. $f(x) = 1 - 3/x + 2/x^2$ => **A/x) = 1**, $x\downarrow\uparrow 0$ => $f(x) \to +\infty$

b) $F = -{}_1\!\int^2 f(x)\,dx = -[x - 3\ln(x) - 2/x]_1^{\,2} = -(2 - 3\ln(2) - 1 - (1 - 0 - 2))$

$= 3\ln(2) - 2 = 0.07944$

c) $f'(1) = -1 = (y - 0)/(x - 1)$ => t: $y = -x + 1$

$t \cap G_f$: $-x + 1 = (x^2 - 3x + 2):x^2$ => $-x^3 + x^2 = x^2 - 3x + 2$ => $x^3 - 3x + 2 = 0$

$x_1 = 1$ ist (doppelte) Lösung => $(x^3 - 3x + 2):(x - 1) = x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$

=> $x_2 = -2$ => **S(-2 | 3)**

2. a) $g_1: \vec{r} = t \cdot (-2 \mid 3 \mid 4)$; $g_2: \vec{r} = (61 \mid -11 \mid -46) + t \cdot (-4 \mid 1 \mid 3)$

$v_1 = |(-2 \mid 3 \mid 4)| = \sqrt{29}$ **= 5.385 [km/s]**;

$v_2 = |(-4 \mid 1 \mid 3)| = \sqrt{26}$ **= 5.099 [km/s]**

b) Normalebene E_2 zu g_2 durch Ursprung: E_2: $-4x + y + 3z = 0$

$E_2 \cap g_2$: $-4(61 - 4t) + (-11 + t) + 3(-46 + 3t) = 0 \Rightarrow 26t = 393$

t = 393/26 = 15.11 (Schnittp: (0.5385 | 4.1154 | -0.6538))

c) $\vec{n} \perp g_1$ und $\vec{n} \perp g_2 \Rightarrow \vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = (-2 \mid 3 \mid 4) \times (-4 \mid 1 \mid 3) = 5 \cdot (1 \mid -2 \mid 2)$

E_1 mit $g_1 \subset E_1$ und $O \in E_1 \Rightarrow E_1$: $x - 2y + 2z = 0$

Abstand $A2E_1$: $1/3 \cdot (61 - 2 \cdot (-11) + 2 \cdot (-46)) = -9/3 \Rightarrow$ **d = 3**

d) $a(t) = d^2 = (61 - 2t)^2 + (-11 - 2t)^2 + (-46 - t)^2 = 9t^2 - 108t + 5958$

$a'(t) = 18t - 108 = 0 \Rightarrow$ **t = 6**

$\Rightarrow$ $\mathbf{d = \sqrt{a(6)} = \sqrt{5634} = 3 \cdot \sqrt{636} = 75.06}$

e) F1, F2: Fusspunkte der Minimaltransversalen, $\overrightarrow{F_1F_2} = \vec{f}$

$\Rightarrow \vec{f} = k \cdot \vec{n} \Rightarrow 61 - 4t^* + 2t = k$ und $-11 + t^* - 3t = -2k$ und $-46 + 3t^* - 4t = 2k$

$\Rightarrow -4t^* + 2t - k = -61$ und $t^* - 3t + 2k = 11$ und $3t^* - 4t - 2k = 46$

$\Rightarrow t^* = 16$; $t = 1$; $k = -1 \Rightarrow F_1(-2 \mid 3 \mid 4)$; $F_2(-3 \mid 5 \mid 2)$

Kontrolle: $\vec{f} = (-1 \mid 2 \mid -2) = -1 \cdot (1 \mid -2 \mid 2)$

(oder $\vec{f} \cdot \vec{a}1 = 0$ und $\vec{f} \cdot \vec{a}_2 = 0 \Rightarrow t$ und t^*)

RS1: Zeit für A1F1: offensichtlich: t = 1

In dieser Zeit muss RS2 von A2 nach F2

$\Rightarrow v_2^* = \overline{A2\,F2} : 1 = \text{sqrt}((-3 - 61)^2 + (5 + 11)^2 + (2 + 46)^2) = 16 \cdot \sqrt{26}$

$=$ $\mathbf{16 \cdot v_2}$ (81.58 km/s)

Kontrolle: $g_2^*: \vec{r} = (61 \mid -11 \mid -46) + t \cdot (-64 \mid 16 \mid 48)$

$a^*(t) = d^{*2} = (61 - 62t)^2 + (-11 + 13t)^2 + (-46 + 44t)^2 = 5949t^2 - 11898t + 5958$

$a^{*\prime}(t) = 11898t - 11898 = 0 \Rightarrow$ **t = 1**

$\Rightarrow$ $\mathbf{d^* = \sqrt{a(1)} = \sqrt{9} = 3}$

3. a) $y` = (2 - 2x) \cdot e^{1-x}$

$y`` = (-4 + 2x) \cdot e^{1-x}$

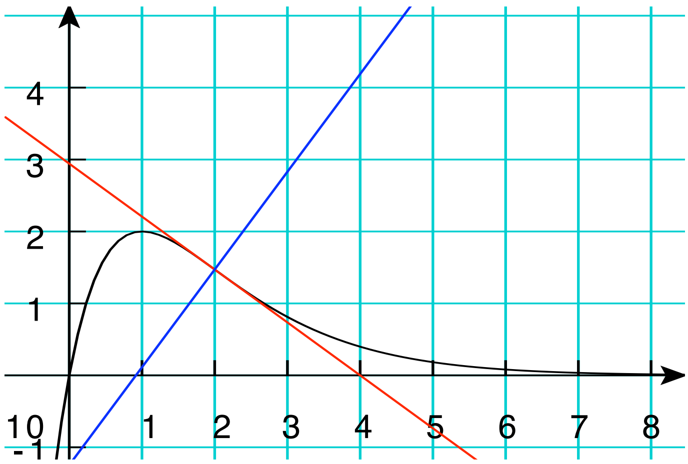
$y``` = (6 - 2x) \cdot e^{1-x}$

$y` = 0 \Rightarrow x = 1,\ y``(1) = -2 < 0$

$\Rightarrow$ **H(1|2)**

$y`` = 0 \Rightarrow x = 2,\ y```(2) = 2/e \neq 0$

$\Rightarrow$ **WP(2|4/e)** = WP(2|1.4715)



b) $y^{(n)} = (-1)^{n+1} \cdot (2n - 2x) \cdot e^{1-x}$

$= \mathbf{(-1)^{n+1} \cdot 2e\,(n - x) \cdot e^{-x}}$

$= \mathbf{(-1)^{n} \cdot 2e\,(-n + x) \cdot e^{-x}}$

c) P = WP(2|4/e)

$y`(2) = -2/e = m_t;\ \Rightarrow m_n = e/2$

t: $-2/e = (y - 4/e)/(x - 2) \Rightarrow$ t: $y = -2/e \cdot x + 8/e$ ($y = -0.7356x + 2.9430$)

$t \cap$ x-Achse: $\Rightarrow x = 4$

n: $e/2 = (y - 4/e)/(x - 2) \Rightarrow$ n: $y = e/2 \cdot x - e + 4/e$ ($y = 1.3591x - 1.2468$)

$n \cap$ x-Achse: $\Rightarrow x = (e - 4/e) \cdot 2/e = 2 - 8/e^2$ ($= 0.9173$)

$\Rightarrow F = 0.5 \cdot g \cdot h = 0.5 \cdot (2 + 8/e^2) \cdot 4/e = \mathbf{4/e + 16/e^3}$ ($= 2.2681$)

d) $Y(x) = (-1)^{-1} \cdot 2e\,(-(-1) + x) \cdot e^{-x} = -2e \cdot (1 + x) \cdot e^{-x}$

$F = \lim_{k \to \infty} {}_0\!\int^k y\,dx = \lim_{k \to \infty} [-2e \cdot (1 + x) \cdot e^{-x}]$

$= \lim_{k \to \infty} [-2e \cdot (1 + k) \cdot e^{-k} + 2e \cdot 1 \cdot 1] = \mathbf{2e}$

4.

$r = 2/3 \cdot a\sqrt{3}/2 = a/\sqrt{3}$

$r^2 + h^2/4 = 1 \Rightarrow a^2/3 + h^2/4 = 1$

$\Rightarrow a^2 = 3 - 3h^2/4 = 3/4 \cdot (4 - h^2)$

$\Rightarrow h^2 = 4 - 4a^2/3 = 4/3 \cdot (3 - a^2)$

a) $V = a^2\sqrt{3}/4 \cdot h$

$V(h) = 3\sqrt{3}/16 \cdot (4h - h^3)$

$\overline{V}'(h) = 4 - 9h^2 = 0 \Rightarrow \mathbf{h = 2/\sqrt{3} \Rightarrow a = \sqrt{2}}$

b) $O = 2 \cdot a^2\sqrt{3}/4 + 3ah$

$O(a) = a^2\sqrt{3}/2 + 3a \cdot 2/\sqrt{3} \cdot \sqrt{3-a^2}$

$= \sqrt{3}(a^2/2 + 2a \cdot \sqrt{3-a^2})$

$\overline{O}'(a) = a + 2\sqrt{3-a^2} + 2a(-2a)/(2\sqrt{3-a^2}) = 0$

$\Rightarrow a\sqrt{3-a^2} + 2(3-a^2) - 2a^2 = 0$

$\Rightarrow a\sqrt{3-a^2} = 4a^2 - 6$

$\Rightarrow a^2(3 - a^2) = 16a^4 - 48a^2 + 36$

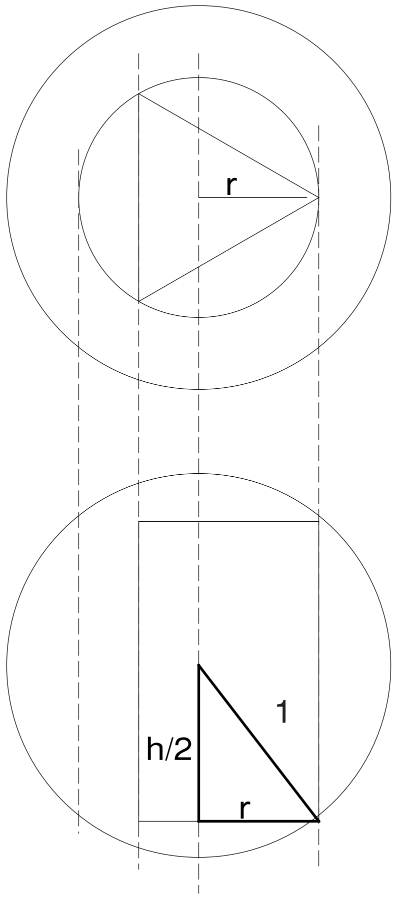
$\Rightarrow 17a^4 - 51a^2 + 36 = 0$

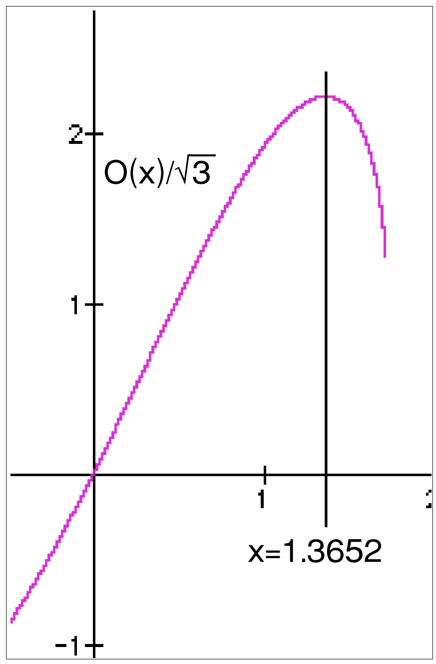
$\Rightarrow a^2_{12} = (51 \pm \sqrt{153})/34 = 3/2 \cdot (1 \pm 1/\sqrt{17})$

$a_1 = 1.3652$, $a_2 = 1.0659$ (Scheinlösung)

$\Rightarrow \mathbf{a = (3/2 \cdot (1 + 1/\sqrt{17}))^{0,5} = 1.3652}$

$\Rightarrow \mathbf{h = (2(1 - 1/\sqrt{17}))^{0,5} = 1.2308}$





5. a) $\overrightarrow{CA} = (-2\ ,\ 2\ ,\ -6),\ \ \overrightarrow{CB} = (4\ ,\ -4\ ,\ -3)$

$\cos\varphi = |\ \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}\ /\ \overline{CA} \cdot \overline{CB}\ | = |(-8 -8 + 18)/\sqrt{44 \cdot 41}\ | = 2/\sqrt{44 \cdot 41}$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{\varphi = 87.30°}$

b) $\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = (-30 \mid -30 \mid 0)$ =F $F(ABC) = 0.5 \cdot |(-30 \mid -30 \mid 0)| = 15 \cdot \sqrt{2}$

$E_{ABC}: x + y + D = 0,\ A \in E \Rightarrow 1 + 4 + D = 0 \Rightarrow D = -5 \Rightarrow E: x + y - 5 = 0$

$\Rightarrow h = \overline{OE} = 5/\sqrt{2} \Rightarrow V = 1/3 \cdot G \cdot h =$ **25**

c) $\overline{PA} = 2 \cdot \overline{PB} \Rightarrow \overline{PA}^{\,2} = 4 \cdot \overline{PB}^{\,2}$

$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 4)^2 + (z + 6)^2 = 4 \cdot \{\ (x - 7)^2 + (\ y + 2)^2 + (z + 3)^2\ \}$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8y + 12z + 53 = 4 \cdot \{\ x^2 + y^2 + z^2 - 14x + 4y + 6z + 62\ \}$

$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 54x + 24y + 12z + 195 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 18x + 8y + 4z + 65 = 0$

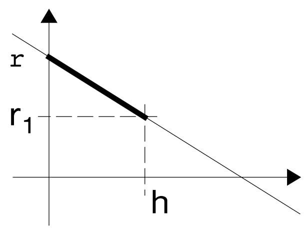
$\Rightarrow (x - 9)^2 + (y + 4)^2 + (z + 2)^2 = -65 + 81 + 16 + 4 = 36 \Rightarrow$ $\mathbf{M(9 \mid -4 \mid -2\ ),\ r = 6}$

d) $g: \vec{r} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} =$ $\mathbf{(\ 1 \mid 4 \mid -6\ ) + t \cdot (6 \mid -6 \mid 3\ )}$.

$A`(\ 1 \mid 4 \mid 6\ )\ ,\ B`(\ 7 \mid -2 \mid 3\ ) \Rightarrow g`: \vec{r} = (\ 1 \mid 4 \mid 6\ ) + t \cdot (6 \mid -6 \mid -3)$

$\Rightarrow t = -1/6 \Rightarrow$ $\mathbf{D(\ 0 \mid 5 \mid 13/2)}$

6. a) $g: m = (r_1 - r_2)/h = (y - r_2)/x$



$\Rightarrow g: y = (r_1 - r_2)/h \cdot x + r_2$

$\Rightarrow V = \pi \cdot {}_0\!\int^h y^2 dx =$

$\pi \cdot [(r_1 - r_2)^2/h^2 \cdot x^2 + 2r_2x(r_1 - r_2)/h + r_2^{\,2}]_0^{\,h}$

$= \pi \cdot [(r_1 - r_2)^2/3h^2 \cdot h^3 + r_2h^2(r_1 - r_2)/h + r_2^{\,2}h]$

$= \pi h/3 \cdot (r_1^{\,2} - 2r_2r_1 + r_2^{\,2} + 3r_1r_2) =$ $\boldsymbol{\pi h/3 \cdot (r_1^{\,2} + r_2r_1 + r_2^{\,2}\ )}$

b) $\lg x + 2 \cdot \lg y/\lg 100 = \lg x + \lg y = \lg xy = \lg(x(x-3)) = 1$

$\Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow (\ x_1 = 2);\ x_2 = -) \Rightarrow$ $\mathbf{(x|y) = (5|2)}$

c) a.F.: $\sin^4(90° - \beta)\ ,\ \sin^4(\beta)\ ,\ \sin^4(90°)$

$s^4(\beta) - s^4(90° - \beta) = s^4(90°) - s^4(\beta) \Rightarrow s^4(\beta) - c^4(\beta) = 1 - s^4(\beta)$

$\Rightarrow 2 \cdot s^4(\beta) - (1 - s^2(\beta))^2 - 1 = s^4(\beta) + 2 \cdot s^2(\beta) - 2 = 0 \Rightarrow s(\beta)^2{}_{12} = -1 \pm \sqrt{3}$

$\Rightarrow s(\beta) = \sqrt{-1 + \sqrt{3}} \Rightarrow$ $\boldsymbol{\beta = 58.83°,\ \alpha = 31.17°\ ,\ \gamma = 90°}$

a.F. : $\sin^4(90° - \beta) = \sin^4(\alpha) = 0.07180$; $\sin^4(\beta) = 0.53590,\ 1$; $d = 0.464102$

7. a) Fahren bei grün, Stop sonst; $P_n(\text{n Stops}) = \binom{6}{n}(2/3)^n \cdot (1/3)^{6-n}$

α) P(mind. 1 Stop) = $1 - P_0 =$ **$1 - 1/3^6 = 0.9986$**

β) P(max. 3 Stops) = $1 - (P_4 + P_5 + P_6) = 1 - (15 \cdot 16 + 6 \cdot 32 + 64)/3^6$

$=$ **$1 - 496/3^6 = 233/729 = 0.3196$**

b) α) $P = 0.1 + 0.9 \cdot 0.1 + 0.9^2 \cdot 0.1 + 0.9^3 \cdot 0.1 + 0.9^4 \cdot 0.1 =$ **$40951/10^5 = 0.4095$**

β) $P = 1/10 + 9/10 \cdot 1/9 + 9/10 \cdot 8/9 \cdot 1/8 + 9/10 \cdot 8/9 \cdot 7/8 \cdot 1/7$

$+ 9/10 \cdot 8/9 \cdot 7/8 \cdot 6/7 \cdot 1/6 = 5 \cdot 1/10$

$= 1/10 + 9/10 \cdot (1/9 + 8/9 \cdot (1/8 + 7/8 \cdot (1/7 + 6/7 \cdot 1/6))) =$ **0.5**

c) $P(rss) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 24/50$

$P(srs) = 1/2 \cdot 26/50 \cdot 24/50$

$P(ssr) = 1/2 \cdot 24/50 \cdot 27/50$

$P(sss) = 1/2 \cdot 24/50 \cdot 23/50$

$P(tot) = 1/2 \cdot 24/50 \cdot (1/2 + 26/50 + 27/50 + 23/50)$

$= 6/25 \cdot 101/50 =$ **$303/625 = 0.4848$**