Matur 6

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

Zeit: 4 Stunden

1. a) Skizziere die Kurven k_1: $y = \sqrt{x}$ und k_2: $y = \ln(x)$; $x \leqslant 8$, LE = 4H.

b) Wie muss a gewählt werden, damit die Strecke, die von k_1 und k_2 aus der Geraden g: $x = a$ ausgeschnitten wird, minimale Länge hat ($a > 0$). Gib auch die Länge dieser Strecke an.

c) Im Punkt $Q(\, b \mid \ln(b)\,)$ mit $b > 1$ ist die Kurvennormale n zu k_2 sowie das Lot s auf die x-Achse gezeichnet. Diese beiden Geraden schliessen mit der x-Achse ein Dreieck ein. Für welche Wahl von b ist die Fläche dieses Dreiecks maximal und wie gross ist die maximale Fläche ?

d) Die Fläche im ersten Quadranten, eingeschlossen von k_2 , den beiden Achsen und der Geraden h: $y = 2$, wird um die y-Achse rotiert. Bestimme das Volumen des dabei entstehenden Körpers.

2. Gegeben sind die Ebene E_1: $x - 2y + 3z - 7 = 0$, die Punkte $A(\,4 \mid -6 \mid -3\,)$, $B(\,0 \mid -2 \mid 1\,)$ und $C(\,-5 \mid -3 \mid -12\,)$ sowie die Gerade g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

a) Bestimme den Winkel α zwischen E_1 und π_1, den Winkel β zwischen E_1 und g, die Koordinatengleichung der Ebene E_2 durch die Punkte A, B und C sowie die Gleichung der Schnittgeraden s von E_1 mit E_2 .

b) Spiegle die Gerade g an E_1 und gib die Gleichung von g^*.

c) Welche Punkte der Geraden g haben von E_1 und E_2 gleiche Abstände und wie gross sind diese ?

3. Gegeben: $f(x) = a \cdot \dfrac{2x^2 - 3}{x^2 - 3}$; $a \in \mathbb{R}$

a) Bestimme die Koordinaten der Extrempunkte von f in Abhängigkeit des Parameters a.

b) Diskutiere f für a = 2 ($\mathbb{D}$, Pole, Nullstellen, Extrema, Wendepunkte, Asymptoten, Graph)

c) Die Tangente t im Punkt P(3|...) an den Graphen von f schneidet diesen in einem weiteren Punkt Q. Bestimme die Koordinaten von Q sowie den Schnittwinkel von t mit dem Graphen in Q.

4. Einer Halbkugel mit Radius 1 ist die reguläre sechsseitige Säule mit
a) maximalem Volumen b) maximaler Oberfläche einbeschrieben.
Bestimme in Aufg. a) und b) jeweils die Grundkante a und die Höhe h.

5. Gegeben: Punkt P(6 | 2), Kreis k_1 mit Mittelpunkt M_1(13 | 1) und Radius $r_1 = 5$, Kreis k_2: $x^2 + y^2 + 8x + 10y - 59 = 0$.

a) Bestimme die Gleichungen der Tangenten von P an k_1. Gib auch die beiden Berührpunkte B_1 und B_2 an.

b) Die Gerade g = (B_1B_2) schneidet von k_1 ein Segment ab. Bestimme, wieviel % der Fläche von k_1 die Segmentfläche ausmacht.

c) Bestimme die Mittelpunkte und Radien aller Kreise, die k_1 und k_2 von aussen berühren und ausserdem die y-Achse berühren.

6. a) Beim UEFA-Cup 1998 waren unter den 16 Mannschaften des Achtelsfinals auch die beiden Stadtrivalen FCZ und GC aus Zürich. Bevor die acht Paare für das Achtelsfinal ausgelost waren, fragte sich Zürichs Fussballwelt wie elektrisiert : Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass FCZ und GC im Achtelsfinal aufeinandertreffen?

b) Ueli ist Finalist in der Sendung "MegaGlotz" und darf aus einer Reihe von 9 verdeckten Karten nacheinander mehrere Karten aufdecken.
5 der 9 Karten zeigen auf der Vorderseite ein Auto, die andern 4 sind schwarz. Das Spiel ist beendet, sobald Ueli zum zweiten Mal eine schwarze Karte oder zum dritten Mal eine Karte mit Auto aufgedeckt hat. Im letzten Fall gewinnt er ein richtiges Auto! Wie gross sind seine Chancen ?

c) In einer Urne liegen 6 Kugeln, welche nacheinander die Ziffern 3, 3, 4, 5, 6, 6 tragen. Es werden nun mehrere Kugeln **mit Zurücklegen** gezogen und die gezogenen Ziffern notiert. Bestimme die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
A: Die Summe der ersten zwei Ziffern ist 9
B: Unter den ersten drei Ziffern kommt genau zweimal die 3 vor
C: Unter den ersten sechs Ziffern kommt mindestens zweimal die 6 vor.

7. Kurzaufgaben:

a) Eine Spirale ist aus unendlich vielen Viertelskreisen (VK) zusammengesetzt. Der Radius des ersten VK ist 1, der Radius jedes folgenden VK ist 4/5 des Radius des vorangehenden VK. Bestimme die Länge der Teilspirale aus den ersten 10 VK sowie die Länge der ganzen Spirale.

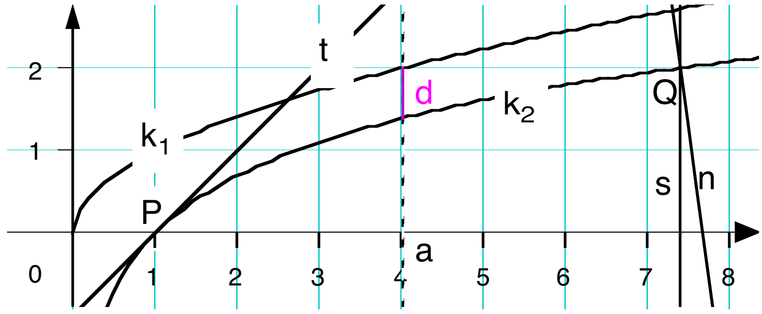
b) Löse exakt: $8\cdot\sin^4(x) + 6\cdot\cos^2(x) - 5 = 0$; $x \in [0, 2\pi]$

c) Eine Stammfunktion von $f(x) = (8x^3 - 24x^2 + 12x)\cdot e^{-2x}$ hat die Form $F(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\cdot e^{-2x}$.

Bestimme auf 4 signifikante Ziffern: $\int\limits_3^\infty f(x)\,dx$

Matur 6: Lösungen

1. a)



b) $d = \sqrt{a} - \ln a$; $d' = 1/(2\sqrt{a}) - 1/a = (\sqrt{a} - 2)/2\sqrt{a} = 0 \Rightarrow a = 4$; $d'(a)$ wechselt bei $a = 4$ von $-$ auf $+$

$\Rightarrow$ **d ist minimal bei $a = 4$; $d(4) = 2 - \ln(4) = 0.6134$**

c) $m(t) = 1/b$ n: $-b = (y - \ln(b))/x - b) \Rightarrow$ n: $y = -bx + b^2 + \ln(b)$

$n \cap$ x-Achse: $y = 0 \Rightarrow x = (b^2 + \ln(b))/b = b + \mathrm{lb}(b)/b$

$F\Delta = 0.5\cdot\ln(b) \cdot [(b + \mathrm{lb}(b)/b - b] = \ln^2(b)/2b$;

$F'\Delta(b) = (2\ln(b)/b \cdot 2b - \ln^2(b) \cdot 2)/4b^2 = \ln(b)[2 - \ln(b)]/2b^2 = 0$; $b > 1$

$\Rightarrow \ln(b) = 2 \Rightarrow$ **$b = e^2$; $F_{max} = 2e^{-2} = 0.5413$**

d) $y = \ln(x) \Rightarrow x = e^y$. $V = \pi\cdot{}_0\!\int^2 e^{2y}dy = \pi\cdot[0.5\cdot e^{2y}]_0^2 =$ **$\pi/2\cdot(e^4 - 1) = 84.19$**

2. a) $\cos\alpha = |(1|-2|3)\cdot(0|0|1)|/\sqrt{14} = 3/\sqrt{14} \Rightarrow$ $\boldsymbol{\alpha = 36.70°}$

$\sin\beta = |(1|-2|3)\cdot(2|3|6)|/\sqrt{14}\cdot 7 = 14/\sqrt{14}\cdot 7 = 2/\sqrt{14} \Rightarrow$ $\boldsymbol{\beta = 32.31°}$

E_2: $\vec{r} = \overrightarrow{OA} + u\cdot\overrightarrow{AB} + v\cdot\overrightarrow{AC} = (4|-6|-3) + u\cdot(-4|4|4) + v\cdot(-9|3|-9)$

$\Rightarrow x = 4 - 4u - 9v$ und $y = -6 + 4u + 3v$ und $z = -3 + 4u - 9v$

$x + y = -2 - 6v$ und $x + z = 1 - 18v \Rightarrow 3x + 3y - x - z = 5$

$\Rightarrow$ $\mathbf{E_2: 2x + 3y - z + 7 = 0}$

$E_1 \cap E_2$: $z = 0 \Rightarrow x - 2y - 7 = 0$ und $2x + 3y + 7 = 0 \Rightarrow -7y - 21 = 0$

$\Rightarrow S_1(1|-3|0)$; $x = 0 \Rightarrow -2y + 3z - 7 = 0$ und $3y - z + 7 = 0 \Rightarrow 7y + 14 = 0$

$\Rightarrow S_2(0|-2|1)$, ebenso $S_3(-2|0|3)$

$\Rightarrow$ **s:** $\vec{r} = \overrightarrow{OS_1} + t\cdot\overrightarrow{S_1S_2} =$ $\mathbf{(1 \mid -3 \mid 0) + t\cdot(-1 \mid 1 \mid 1)}$

b) $g \cap E_1$: $(1 + 2t) - 2(6 + 3t) + 3(6 + 6t) - 7 = 0 \Rightarrow 14t = 0 \Rightarrow D(1|6|6)$

$P(3|9|12) \in g \Rightarrow l$: $\overrightarrow{OP} + t\cdot\vec{n}_{E_1} = (3|9|12) + t\cdot(1|-2|3)$

$l \cap E_1$: $(3 + t) - 2(9 - 2t) + 3(12 + 3t) - 7 = 0 \Rightarrow 14t + 14 = 0 \Rightarrow t = -1$

$\Rightarrow F(2|11|9) \Rightarrow \overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{PF} = (2|11|9) + (-1|2|-3) \Rightarrow P^*(1|13|6)$

$\Rightarrow$ **g*:** $\vec{r} = \overrightarrow{OD} + t\cdot\overrightarrow{P^*D} =$ $\mathbf{(1|6|6) + t(0|1|0)}$

(oder mit $t = -1$: $P(-1|3|0) \in g \Rightarrow F(0|1|3)$ etc.)

c) W_{12}: $= (x - 2y + 3z - 7)/\sqrt{14} = \pm(2x + 3y - z + 7)/\sqrt{14}$

$\Rightarrow$ $\mathbf{W_1: x + 5y - 4z + 14 = 0;\ W_2: 3x + y + 2z = 0}$

$g \cap W_1$: $(1 + 2t) + 5(6 + 3t) - 4(6 + 6t) + 14 = 0$

$\Rightarrow 7t = 21 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow$ $\mathbf{P_1(7|15|24)}$

$\mathbf{P_1E_{12}} = |7 - 30 + 72 - 7|/\sqrt{14} = 42/\sqrt{14} =$ $\mathbf{3\cdot\sqrt{14} = 11.22}$

$g \cap W_2$: $3(1 + 2t) + (6 + 3t) + 2(6 + 6t) = 0$

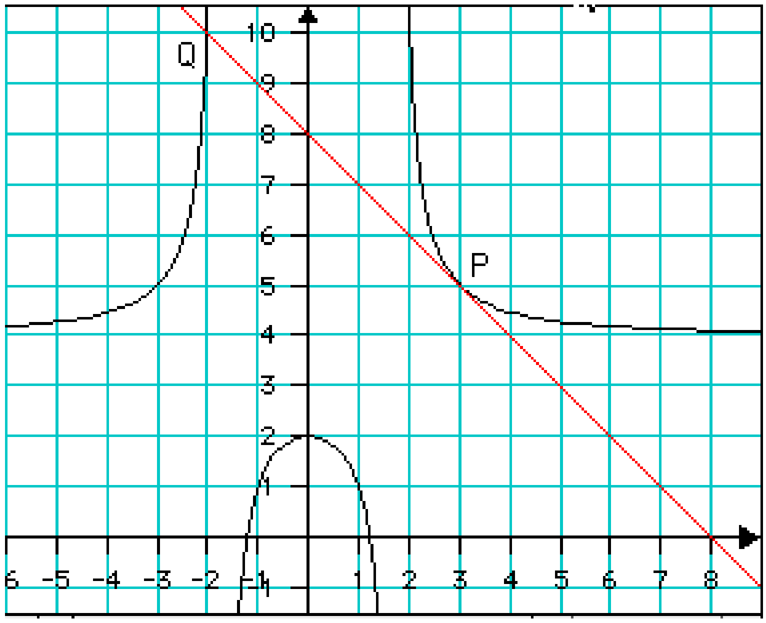
$\Rightarrow 21t = -21 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow$ $\mathbf{P_2(-1|3|0)}$

$\mathbf{\overline{P_2E_{12}}} = |-1 - 6 + 0 - 7|/\sqrt{14} = 14/\sqrt{14} =$ $\mathbf{\sqrt{14} = 3.742}$

3. a) $f'(x) = a \cdot [4x(x^2 - 3) - (2x^2 - 3) \cdot 2x]/(x - 3)^2 = a \cdot (-6x)/(x^2 - 3)^2 = 0 \Rightarrow x = 0;$
f' wechselt bei $x = 0$ das Zeichen => Extrempunkt: **E(0|a)**

b) $f'(x) = 2 \cdot [4x(x^2 - 3) - (2x^2 - 3) \cdot 2x]/(x - 3)^2 = -12x/(x^2 - 3)^2$
$f''(x) = [-12(x^2 - 3)^2 + 12x \cdot 2(x^2 - 3) \cdot 2x]/(x^2 - 3)^4 = [36x^2 + 36]/(x^2 - 3)^3$

$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\};$
N: $x_{12} = \pm\sqrt{3/2};$
Pole : $x_{34} = \pm\sqrt{3},$
Symm. bez. y-Achse
$f'(x) = 0 \Rightarrow x_5 = 0;$
$f''(0) = -4/3$
od. f´wexhselt bei x_5 das Zeichen von + auf -
=> **H(0|2)**
$f''(x) = 0$ hat keine Lösung
=> **kein WP**
für x --> ± ∞ gilt f(x) --> 4;
Asymptoten:
y = 4 und x = $\pm\sqrt{3}$



c) P(3|5); $f'(3) = -1$
t: $-1 = (y - 5)/x - 3) \Rightarrow$ **t: y = -x + 8**
$t \cap G_f$: $-x + 8 = (4x^2 - 6)/(x^2 - 3) \Rightarrow (-x + 8)(x^2 - 3) = 4x^2 - 6$
$\Rightarrow x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0$; x = 3 ist Doppellösung
$\Rightarrow (x^3 - 4x^2 - 3x + 18):(x - 3)^2 = x + 2 \Rightarrow$ **Q(-2|10)**
$\underline{-(x^3 - 6x^2 + 9x)}$
/ $2x^2 - 12x + 18$
$\tan\varphi = m = f'(-2) = 24 \Rightarrow \varphi = 87.61° \Rightarrow$ **α =** $45° + 2.386° =$ **47.39°**
oder $\tan\alpha = |(24 - (-1))/(1 + 24 \cdot (-1)| = 25/23 \Rightarrow \alpha = 47.39°$

4. $h = \sqrt{1 - a^2}$

a) $V = 6 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}/4 \cdot \sqrt{1 - a^2}$; $\overline{V}(a) = a^2 \cdot \sqrt{1 - a^2}$

$\overline{V}'(a) = 2a \cdot \sqrt{1 - a^2} + a^2(-2a)/2\sqrt{1 - a^2} = 0$

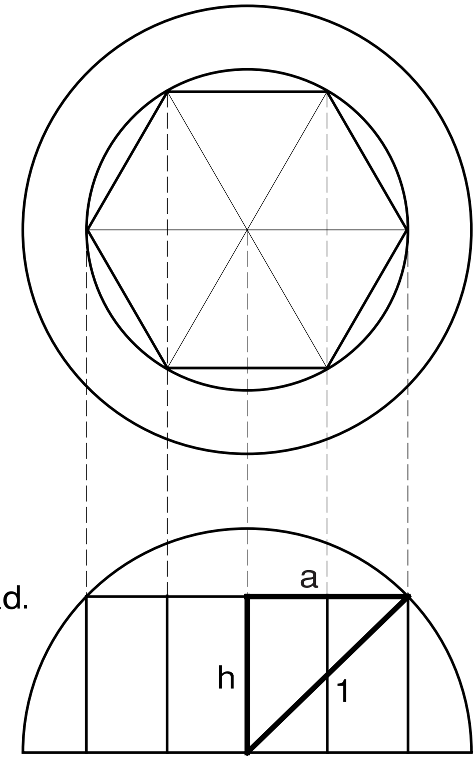
$\Rightarrow 2a(1-a^2) - a^3 = 2a - 3a^3 = 0$

$\Rightarrow$ **$a = \sqrt{2/3}$; $h = \sqrt{1/3}$**

($\mathbf{V_{max}} = 6 \cdot 2 /(3 \cdot 4) \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{1/3} = \mathbf{1}$**)**

(einfacher: $V(h) = 3\sqrt{3}/2 \cdot (1-h^2) \cdot h$

$\overline{V}'(h) = 1-3h^2 \Rightarrow h = \sqrt{1/3}$ etc.)



b) $O = 12 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}/4 + 6 \cdot a \cdot \sqrt{1 - a^2}$

$\overline{O}(a) = a^2 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot a \cdot \sqrt{1 - a^2}$

$\overline{O}'(a) = 2a \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{1 - a^2} + 2a(-2a)/2\sqrt{1 - a^2} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{3} \cdot a \cdot \sqrt{1 - a^2} = -(1 - a^2) + a^2 = 2a^2 - 1$ | quad.

$\Rightarrow 3a^2 - 3a^4 = 4a^4 - 4a^2 + 1$

$\Rightarrow 7a^4 - 7a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a^2_{12} = (7 \pm \sqrt{21})/14$

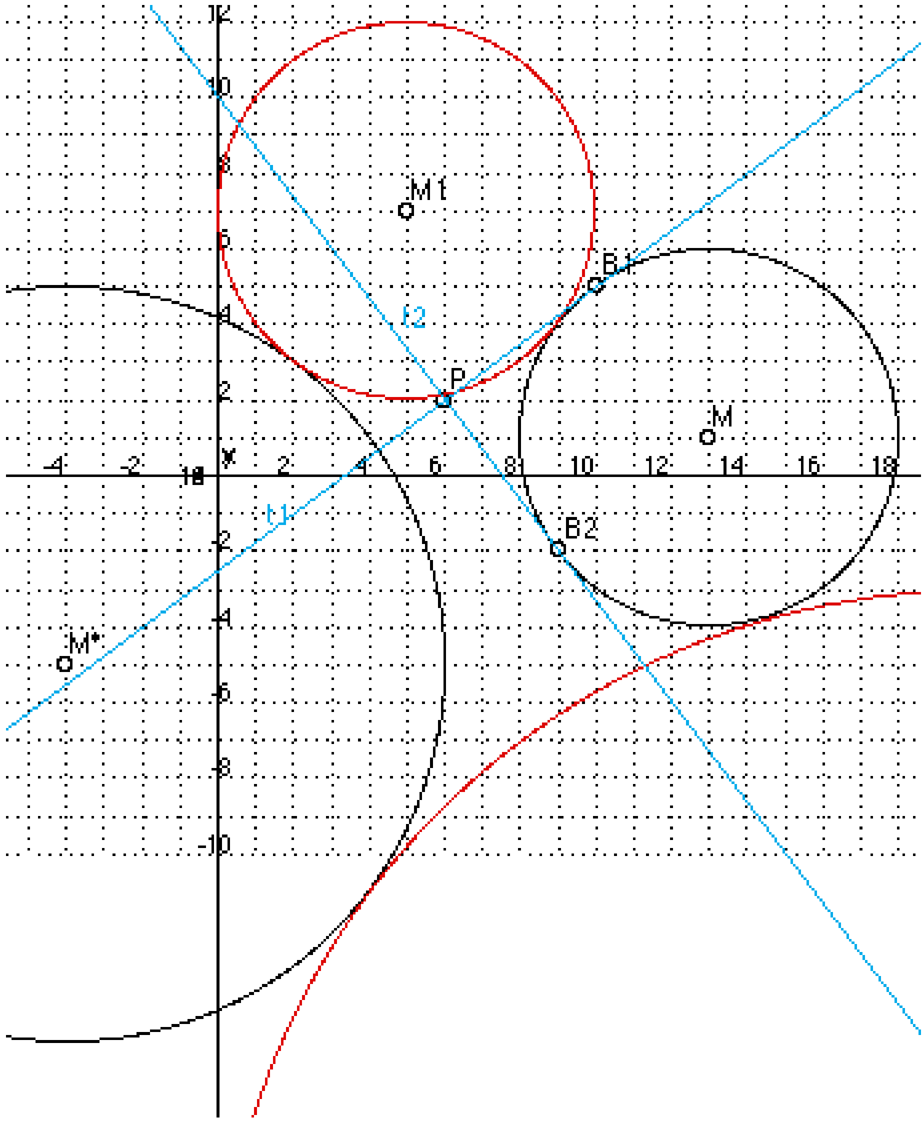
$\Rightarrow a_1 = 0.9096$, $a_2 = 0.4155$

Probe (wg. Quadrieren)

$\Rightarrow$ a **= 0.9096** $\Rightarrow$ **h = 0.4155** (= a_2!)

(=> $\mathbf{O_{max}}$ **= 6.567)**

5.



a) t: $(x - 13)(x_0 - 13) + (y - 1)(y_0 - 1) = 25$; $B(x_0 \mid y_0)$;

$P(6|2) \in t$: $-7 \cdot (x_0 - 13) + 1 \cdot (y_0 - 1) = 25$

$\Rightarrow y_0 = 7x_0 - 65$

$B \in k_1$: $(x_0 - 13)^2 + ((7x_0 - 65) - 1)^2 = 25$

$\Rightarrow 50x^2 - 950x + 4500 = 0 \Rightarrow x^2 - 19x + 90 = (x - 10)(x - 9) = 0$

$\Rightarrow$ **$B_1(10 \mid 5)$, $B_2(9 \mid -2)$**

t_1: $(x - 13)(-3) + (y - 1) \cdot 4 = 25$ $\Rightarrow$ **t_1: $y = 3/4 \cdot x - 5/2$**

t_1: $(x - 13)(-4) + (y - 1) \cdot (-3) = 25$ $\Rightarrow$ **t_1: $y = -4/3 \cdot x + 10$**

oder: $P \in T \Rightarrow m_t = (y-2)/(x-6) \Rightarrow$ t: $y = mx - 6m + 2$

$\Rightarrow \overline{M_1 t} = 5 = (m \cdot 13 - 1 - 6m + 2)/\sqrt{m^2+1} \Rightarrow 7m + 1 = 5\sqrt{m^2+1}$

$\Rightarrow 12m^2 + 7mm - 12 = 0 \Rightarrow m_{12} = (-7 \pm 25)/24 \Rightarrow 3/4; -4/3$ ...

b) $\overrightarrow{M_1B_1} = (-3 \mid 4)$, $\overrightarrow{M_1B_2} = (-4 \mid -3)$; $\overrightarrow{M_1B_1} \cdot \overrightarrow{M_1B_2} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{M_1B_1} \perp \overrightarrow{M_1B_2}$

$\alpha = 90° \Rightarrow F_{seg} = \pi \cdot 5^2/4 - 5^2/2 = 7.135 \Rightarrow$ **9.0845%**

c) k_2: $(x + 4)^2 + (y + 5)^2 = 100$; ges: k mit M(u|v), r
k ber. y-Achse von links => $u = r$

$\overline{MM_1}^2 = (u - 13)^2 + (v - 1)^2 = (u + 5)^2$
$\overline{MM_2}^2 = (u + 4)^2 + (v + 5)^2 = (u + 10)^2$
$v^2 - 2v - 36u = 145$ und $v^2 + 10v - 12u = 59$
I -3·II: $-2v^2 + 32v + 322 = 0 \Rightarrow v^2 + 16v - 161 = 0 \Rightarrow v = 7, v' = -23$
=> **M(5 | 7), r = 5; M´(20 | -23), r´ = 20**

6. a) Ich bin beim FCZ. Wieviele mögliche Parnter gibt es für mich ?
Antwort : 15, alle gleich wahrscheinlich => **p = 1/15**.
komplizierter: m = Anzahl möglicher Paarungen = $15\cdot13\cdot11\cdot9\cdot7\cdot5\cdot3$
g = Anzahl günstiger Paarungen (d.h. FCZ - GC ist fest, Rest zufällig)
$= 13\cdot11\cdot9\cdot7\cdot5\cdot3 \Rightarrow p = g/m = 1/15$

b) a: Auto, s: schwarz, p(saaa) = p(asaa) = p(aasa)
p(aaa) = 5/9 · 4/8 · 3/7, p(saaa) = 4/9 · 5/8 · 4/7 · 3/6
p = 5/42 + 3· 5/63 = 5/42 + 5/21 = 15/42 = **5/14**

c) P(A) = P(3+6)+P(4+5) = 2·2/6·2/6 + 2·1/6·1/6 = 2/9 + 1/18
= **5/18 = 0.278**
P(B) = P(x33) + P(3x3) + P(33x) = 3 · 2/6·2/6·4/6 = **2/9**
$P(C) = 1 - \sum_{k=0}^{1} \binom{6}{k}(1/3)^k(2/3)^{6-k} = 1 - 1/3^6[2^6 + 6\cdot2^5]$
= **1 - 256/729 = 473/729 = 0.6488**

7. a) $b_1 = \pi/2$, $q = 4/5$, $s_{10} = \pi/2\cdot(1-0.8^{10})/(1-0.8) = 5\pi/2 \cdot (1 - 0.8^{10}) =$ **7.011**
$s = \pi/2 \cdot 1/(1-4/5) = 5\pi/2 =$ **7.854**

b) $8s^4 + 6(1 - s^2) - 5 = 0 \Rightarrow 8z^2 - 6z + 1 = 0 \Rightarrow z_{12} = (6 \pm 2)/16$
$z_1 = 1/2 = \sin^2(x) \Rightarrow$ **$x = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$**
$z_2 = 1/4 = \sin^2(x) \Rightarrow$ **$x = \pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6$**

c) $F'(x) = (3ax^2 + 2bx + c)e^{-2x} - 2(ax^3 + bx^2 + cx + d)\cdot e^{-2x}$
$= (-2ax^3 + (3a - 2b)x^2 + (2b - 2cx) + (c - 2d))\cdot e^{-2x} = f(x)$
$\Rightarrow -2a = 8 \Rightarrow a = -4; -12 - 2b = -24 \Rightarrow b = 6; 12 - 2c = 12 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow d = 0$
=> **$F(x) = (-4x^3 + 6x^2)\cdot e^{-2x}$**
$\int_3^a f(x)dx = F(a) - F(3) = (-4a^3 + 6a^2)\cdot e^{-2a} - (-4\cdot27 + 6\cdot9)\cdot e^{-6}$
$\lim_{a \to \infty}(\int_3^a f(x)dx) = 54\cdot e^{-6} =$ **0.1339**