Matur 7

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

Zeit: 4 Stunden

1. Gegeben: $f(x) = \frac{1}{9} \cdot \frac{x^3}{x - a}$

a) Bestimme den Wert des Parameters a so, dass alle Extremalpunkte von G_f auf der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten liegen.

b) Diskutiere f für a = 2 (LE = 2H, $-8 \leqslant x \leqslant 12$). Gib auch die Gleichung der asymptotischen Kurve für x -> $\pm\infty$ an.

c) Es sei n die Normale zu G_f im Punkt P(-6 | ...). Bestimme die x-Koordinaten aller gemeinsamen Punkte von n und G_f.

2.

Gegeben sind die Punkte A(3 | 6 | 4), B(4 | 3 | 0) und C(10 | 21 | 16) sowie die Ebene E_1: z = 2.

a) Bestimme die Gleichung der Ebene E_2 durch A, B und C, den Winkel α zwischen der Geraden g = (AB) und E_1, den Winkel β zwischen E_1 und E_2 sowie die Gleichung der Schnittgeraden s von E_1 und E_2.

b) Eine Kugel K mit Mittelpunkt M(u | v | w) und Radius R = 3 geht durch A und B, M liegt auf E_1 und es gilt u > w. Bestimme die Gleichung von K.

c) Ein Lichtstrahl von C aus in Richtung von Q(-4 | -7 | -10) wird an der Kugel K reflektiert. Wo durchstösst der reflektierte Strahl π_1 ?

3. Gegeben ist die Kurve mit der Gleichung k: $y = (x^2 - 4)\cdot e^{-x-1}$.

a) Bestimme Nullstellen und Extrema ; zeichne k (LE = 4H, $-2 \leqslant x \leqslant 4$).

b) Eine Stammfunktion von $f(x) = (x^2 - 4)\cdot e^{-x-1}$ hat die Form $F(x) = (ax^2 + bx + c)\cdot e^{-x-1}$. Bestimme a, b und c.

c) Die Tangente t in P(-1 | ...) an k hat mit k auch noch den Punkt Q gemeinsam. Bestimme die Gleichung von t, den Punkt Q sowie die Fläche A, die von k und t zwischen den Punkten P und Q eingeschlossen wird.

d) Unter welchem Winkel schneiden sich k und t in Q ?

4. Einer Kugel mit Radius 1 ist ein Quader einbeschrieben, bei dem zwei der drei Kanten im Verhältnis 1 : 2 stehen. Wie lang sind die drei Kanten, wenn a) das Volumen, b) die Oberfläche maximal ist ?

5. a) Auf den vier Flächen eines regulären Tetraeders sind die Zahlen 1, 2, 3 und 4 aufgemalt. Das Tetraeder wird zweimal geworfen und jeweils die unten liegende (also verdeckte) Zahl notiert. X sei das Produkt dieser Zahlen. Bestimme die Verteilung und den Erwartungswert von X.

b) Bei einem Spiel mit zwei Würfen dieses Tetraeders sei X der Gewinn in Franken; bei einer Doppelvier gibt es aber keinen Gewinn, sondern es müssen v Franken bezahlt werden. Bestimme v, wenn das Spiel fair ist.

c) Claudia vermutet, die Vier komme zu oft und plant folgenden Test: Nach hundert Würfen wird das Tetraeder als gefälscht bezeichnet, wenn dabei 35 mal oder noch öfter die Vier gekommen ist. Wie gross ist die statistische Sicherheit dieses Tests ?

d) Mit welcher Wahrscheinlicheit hätte Claudia mit obigem Test einen Fehler 2. Art begangen, wenn in Wahrheit die Chancen für eine Vier 30% wären? Interpretiere die Resultate von c) und d) mit zwei allgemeinverständlichen Sätzen.

6. Gib die Gleichungen **aller** Kreise an, welche die x-Achse sowie die beiden Kreise K_1: $(x - 10)^2 + (y - 1)^2 = 1$ und K_2: $(x + 6)^2 + (y + 1)^2 = 81$ berühren.

7. Kurzaufgaben:

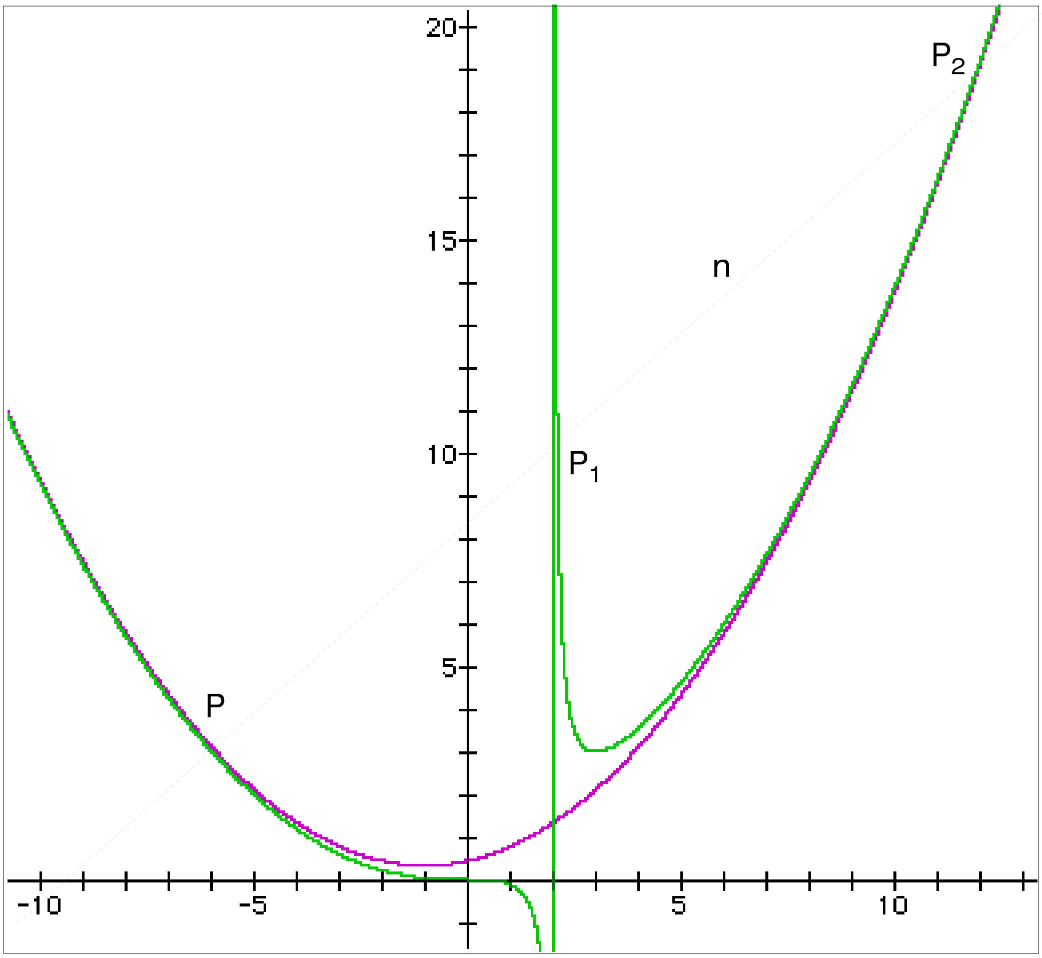
a) Bestimme exakt: $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 2x - 12}{x^2 + x - 42}$

b) Löse: $e^{8 \cdot \ln(3)} \cdot e^{-\frac{8}{3} \cdot \ln(3)} \cdot e^{\frac{8}{9} \cdot \ln(3)} \cdot e^{-\frac{8}{27} \cdot \ln(3)} \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots = 3^{\sqrt{x+1}} \cdot 3^x$

c) Löse: $4 \cdot \sin^5 x + 7 \cdot \sin x \cdot \cos^2 x - 4 \cdot \sin x = 0$; $x \in [0; 2\pi]$

Matur 7: Lösungen

1. a) $f'(x) = 1/9 \cdot (2x^3 - 3ax^2)/(x - a)^2$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3a/2$; $N(0|0) \in w_1$ (!);
$E(3a/2 \mid f(3a/2)) \in w_1 \Leftrightarrow 3a/2 = (3a/2)^3/9(3a/2 - a) = 27a^3 \cdot 2/(9 \cdot 8 \cdot a)$ => $\mathbf{a = 2}$
b) $9 \cdot f'(x) = x^2(2x - 6)/(x - 2)^2$; $9 \cdot f''(x) = 2x(x^2 - 6x + 12)/(x - 2)^3$
1. **$\mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{2\}$; k. Symm. ers.; N(0 | 0), Pol bei $x_2 = 2$**
2. $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$, $f''(0) = 0 \Rightarrow$?; $f''(3) = 2 \Rightarrow$ **T(3 | 3)**
3. $f''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, f''wechselt bei x_1 d. Zeichen von + auf - => **TP(0 | 0)**
x_{34}: D = 36 - 48 < 0 => keine weiteren WP
4. **$\lim(x \to \pm\infty)\ f(x) = \infty$; $\lim(x\uparrow 2) f(x) = -\infty$; $\lim(x\downarrow 2) f(x) = \infty$**
$f(x) = 1/9 \cdot [x^2 + 2x + 4 + 8/(x - 2)] \Rightarrow$ **$A(x) = 1/9 \cdot (x^2 + 2x + 4)$**
(Scheitel von A(x) : S(-1 | 1/3))
c) $f'(-6) = -9/8$, P(-6 | 3) => n: $8/9 = (y - 3)/(x + 6)$ => **n: $y = 8x/9 + 25/3$**
$n \cap G_f$: $8x/9 + 25/3 = f(x) \Rightarrow x^3 - 8x^2 - 59x + 150 = 0$
$p \in n \Rightarrow (x^3 - 8x^2 - 59x + 150):(x + 6) = x^2 - 14x + 25$
=> **$x_{34} = 7 \pm 2\sqrt{6}$, $x_3 = 11.899$, $x_4 = 2.1010$**



2. a) E_2: $\vec{r} = \overrightarrow{OA} + u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC} = (3 \mid 6 \mid 4) + u(1|-3|-4) + v(7|15|12)$

I: $x = 3 + u + 7v$; II: $y = 6 - 3u + 15v$; II: $z = 4 - 4u + 12v$

3I + II: $3x + y = 15 + 367v$; 4I + II: $4x + z = 16 + 40v$

10I´- 9II´: $30x - 10y - 36x - 9z = 6$

=> $\mathbf{E_2: 6x - 10y + 9z + 6 = 0}$; $\vec{n}_2 = (6|-10|9)$;

g: $\vec{r} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} = (3|6|4) + t(1|-3|-4)$; $\vec{n}(E_1) = (0|0|1)$

$\sin\alpha = |(1|-3|-4))\cdot(0|0|1)|/\overline{AB}\cdot n_1 = 4/\sqrt{26} \cdot 1 = 0.7845$ => $\boldsymbol{\alpha = 51.67°}$

$\cos\beta = |\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|/n_1\cdot n_2 = 9/\sqrt{217} \cdot 1 = 0.6110$ => $\boldsymbol{\beta = 52.34°}$

$E_1 \cap E_2$: $z = 2$ => $6x - 10y + 24 = 0$ => z. B $P_1(0|2.4|2)$ $P_2(-4|0|2) \in s$

$\overrightarrow{P_1P_2} = (-4 \mid -2.4 \mid 0)$=> **s:** $\boldsymbol{\vec{r}} = \overrightarrow{OP_1} + t\cdot\overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{(-4|0|2) + t\cdot(5|3|0)}$

b) $M(u|v|2)$, $\overline{MA}^2 = 9$ und $\overline{MA}^2 = \overline{MB}^2$

=> $(u-3)^2 + (v-6)^2 + (2-4)^2 = 9$ und

$(u-3)^2 + (v-6)^2 + (2-4)^2 = (u-4)^2 + (v-3)^2 + (2-0)^2$

II => $2u - 6v = -20$; $u = 3v - 10$ in I: $(3v - 13)^2 + (v-6)^2 = 5$

oder: $(u-3)^2 + (v-6)^2 + (2-4)^2 = 9$ und $(u-4)^2 + (v-3)^2 + (2-0)^2 = 9$

=> $u^2 + v^2 - 6u - 12v = -40$ und $u^2 + v^2 - 8u - 6v = -20$ => $u = 3v - 10$ etc.

=> $10v^2 - 90v + 200 = 0$ => $v_1 = 4$, $v_2 = 5$ => $M_1(2|4|2)$, $\mathbf{M_2(5|5|2)}$

=> **K:** $\mathbf{(x-5)^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2 = 9}$

c)Strahl: $\vec{r} = \overrightarrow{OC} + t\cdot\overrightarrow{CQ} = (10 \mid 21 \mid 16) + t \cdot (7|14|13) \cap K$

=> $(5+7t)^2 + (16+14t)^2 + (14+13t)^2 = 9$ => $414t^2 + 882t + 468 = 0$

=> $t_1 = -1$, $t_2 = -26/23$, Skizze => $t = -1$ => **D(3|7|3)**

Tangentialebene: $\vec{n}_T = \overrightarrow{MD} = (-2|2|1)$ => T: $-2x + 2y + z + k = 0$

$D \in T$ => $-6 + 14 + 3 + k = 0$ => $k = -11$ => $\mathbf{T: -2x + 2y + z - 11 = 0}$

C an T spiegeln: Lot zu T durch C l: $\vec{r} = \overrightarrow{OC} + t \cdot \vec{n}_T = (10|21|16) + t\cdot(-2|2|1)$

$l \cap T$=> $-2(10-2t) + 2\cdot(21+2t) + (16+t) - 11 = 0$=> $9t + 27 = 0$ => $t = -3$ => F

=> $\overrightarrow{OC}' = \overrightarrow{OC} - 6 \cdot (-2|2|1)$ => **C´(22 | 9 | 10)**

refl. Strahl: $\vec{D} = \overrightarrow{OD} + t \cdot \overrightarrow{C'D} = (3|7|3) + t \cdot (-19 \mid -2 \mid -7)$

refl. Strahl $\cap \pi_1$ => $3 - 7t = 0$ => $t = 3/7$

=> **S(−36/7 | 43/7 | 0) = S(−5.14 | 6.14 | 0)**

3. a) $f'(x) = (-x^2+2x+4)\cdot e^{-x-1}$, $f''(x) = (x^2-4x-2)\cdot e^{-x-1}$

Nullstellen: $\mathbf{x_{12} = \pm 2}$

Extrema: $f'(x) = 0 \Rightarrow x_{34} = 1 \pm \sqrt{5}$

$f''(x_3) = -0.0647 \Rightarrow$ **H(1+ √5 | 0.0936) = H(3.236 | 0.0936)**

$f''(x_4) = 5.66 \Rightarrow$ **T(1- √5 | -3.130) = T(-1.236 | -3.130)**

b) $F'(x) = (-ax^2 + (2a-b)x + (b-c))\cdot e^{-x-1} \Rightarrow$ **a = -1, b = -2, c = 2**

$\Rightarrow F(x) = (-x^2 -2x + 2)\cdot e^{-x-1}$

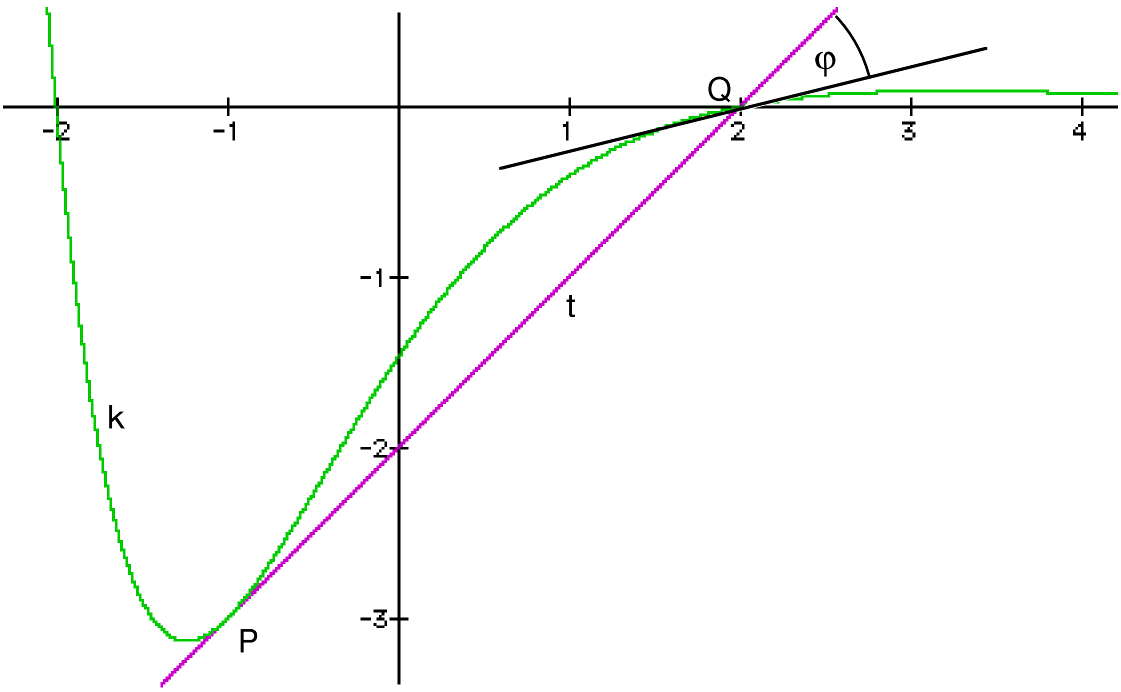
c) $P(-1 \mid -3)$; $f'(-1) = 1 = (y + 3)/(x + 1) \Rightarrow$ **t: y = x - 2** $\Rightarrow$ **Q(2 | 0)**

$A = \int_{-1}^{2}[f(x) - (x-2)]dx = \int_{-1}^{2}f(x)dx - \int_{-1}^{2}(x-2)dx =$

$(-4-4+2)e^{-3} - (-1+2+2)e^{0} - [2-4-(0.5 + 2)] =$

$-6e^{-3} - 3 + 4.5 = \mathbf{1.5 - 6e^{-3} = 1.201}$

d) $f'(2) = 4e^{-3} \Rightarrow \tan\varphi = |(4e^{-3} - 1)/(1+4e^{-3}\cdot 1)| = 0.66785 \Rightarrow \boldsymbol{\varphi = 33.74°}$



(-1.5|-2.89), (-1|-3), (-0.5|-2,27), (0|-1.47), (0.5|-0.84), (1|-0.41), (1.5|-0.15), (2.5|0.07)

4. $5x^2 = 4r^2 \Rightarrow r^2 = 5x^2/4$

$\Rightarrow r^2 = 5x^2/4 = 1 - h^2/4 \Rightarrow h = \sqrt{4 - 5x^2}$

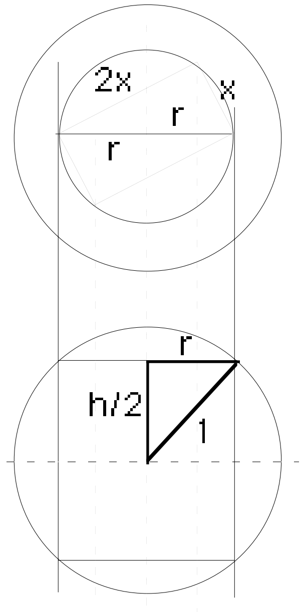
$V = 2x^2h \Rightarrow V(x) = 2x^2\sqrt{4 - 5x^2}$ (einfacher: V(h) !)

$V'(x) = 4x\sqrt{4 - 5x^2} + 2x^2(-10x)/2\sqrt{4 - 5x^2} = 0$

$\Rightarrow 4x(4 - 5x^2) - 10x^3 = 0$

$\Rightarrow 2x(8 - 15x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt{8/15} = 0.7303$

(V' wechselt bei x_1 das Zeichen von + auf −, o.ä.)



$\Rightarrow$ Kanten: $\mathbf{2\sqrt{2/15},\ 4\sqrt{2/15},\ 2/\sqrt{3}}$

0.7303, 1.4606, 1.1547

($V_{max} = V(x_1) = 1.232$; $k_3 = 1.1547$)

$V(h) = 2(4h - h^3)/5$; $V'(h) = 0 \Rightarrow h = 2/\sqrt{3}$ etc.

b) $O = 4x^2 + 4xh + 2xh = 4x^2 + 6xh$

$O(x) = 4x^2 + 6x\sqrt{4 - 5x^2}$; Ges: Max in $I = [0, 2/\sqrt{5}]$

$O(0) = 0$, $O(2/\sqrt{5}) = 16/5$; O stetig und pos. in I.

$O'(x) = 8x + 6\sqrt{4 - 5x^2} + 6x(-10x)/2\sqrt{4 - 5x^2} = 0$

$\Rightarrow 8x\sqrt{4 - 5x^2} + 6(4 - 5x^2) - 30x^2 = 0 \Rightarrow 2x\sqrt{4 - 5x^2} = 15x^2 - 6$

$\Rightarrow 4x^2(4 - 5x^2) = 225x^4 - 180x^2 + 36 \Rightarrow 245x^4 - 196x^2 + 36 = 0$

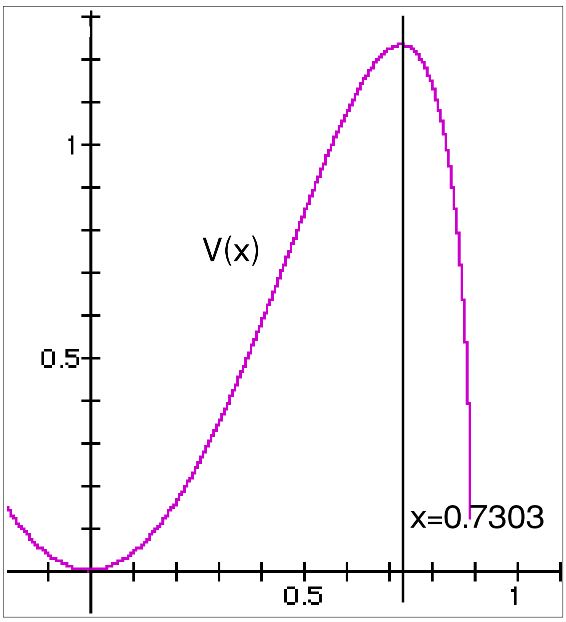
$\Rightarrow x^2_{12} = (196 \pm 56)/490$

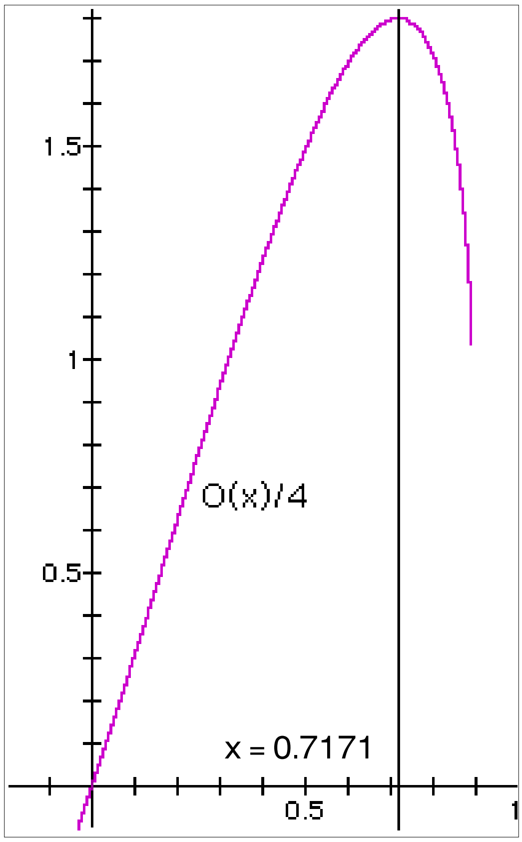
$\Rightarrow x_1 = \sqrt{18/35}$, $x_2 = \sqrt{2/7}$ (Scheinlösung)

$\Rightarrow$ Kanten: $\mathbf{3\sqrt{2/35},\ 6\sqrt{2/35},\ \sqrt{10/7}}$

= 0.7171, 1.4343, 1.1952

($O_{max} = O(x_1) = 7.2$, $h_1 = k_3 = 1.1952$)





5. a)

X	**1**	**2**	**3**	**4**	**6**	**8**	**9**	**12**	**16**
P(X=x) · 16	**1**	**2**	**2**	**3**	**2**	**2**	**1**	**2**	**1**

E(x) = (1+4+6+12+12+16+9+24+16)/16 = = 100/16 = **25/4**

b) 0 = E(X′) = (1+ 4 + 6 +12 +12 +16 + 9 + 24)/16 -v/16 => **v = 84**

c) H_0: P(Vier) = 1/4, H_1: P(Vier)>1/4;

P(Anz. Vieren in 100 Würfen ⩾ 35) = 1 - P(Anz. Vieren in 100 Würfen ⩽ 34)

= 1 - 0.9836 = 0.0164

=> H_0 kann mit der stat. Sicherheit von **98.36%** zu gunsten von H_1 verworfen werden.

d) H_0 ist falsch, wird aber nicht verworfen:

P(Anz. Vieren in 100 Würfen ⩽ 34 und P(Vier) = 0.3)) = **0.8371** (!)

Mit diesem Test wird mit grosser Sicherheit (98.4%) ein L-Tetraeder als solches bestätigt. Dagegen wird ein gefälschtes Tetraeder, bei dem die Vier zuoft kommt (P(Vier) = 0.3 statt 0.25), in den wenigsten Fällen als solches entlarvt.

6. Ges: M(u|v), r

a) x-Achse von oben => v = r,

=> K_1 von aussen: $(u - 10)^2 + (v - 1)^2 = (v + 1)^2$ | ·1 (*)

=> K_2 von aussen: $(u + 6)^2 + (v + 1)^2 = (v + 9)^2$ | ·(-1)

=> 32u - 4v + 64 = -16v - 80 => -8u + 3v = -36 => u = (3v + 36)/8

u in (*) => $(3v - 44)^2 = 64 \cdot 4v$ => $9v^2 - 520v + 1936 = 0$; $v_1 = 484/9$, $v_2 = 4$

=> $u_1 = 74/3$; **KL_1: $(x - 74/3)^2 + (y - 484/9)^2 = (484/9)^2$**

$u_2 = 6$; **KL_2: $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 4^2$**

b) x-Achse von oben => v = r,

=> K_1 umfassend: $(u - 10)^2 + (v - 1)^2 = (v - 1)^2$ => u = 10

=> K_2 von aussen: $(10 + 6)^2 + (v + 1)^2 = (v + 9)^2$ => 16v = 176, v = 11

=> **KL_3: $(x - 10)^2 + (y - 11)^2 = 11^2$**

c) x-Achse von unten => v = -r

=> K_1 von aussen: $(u - 10)^2 + (v - 1)^2 = (-v + 1)^2$ | ·1 (*)

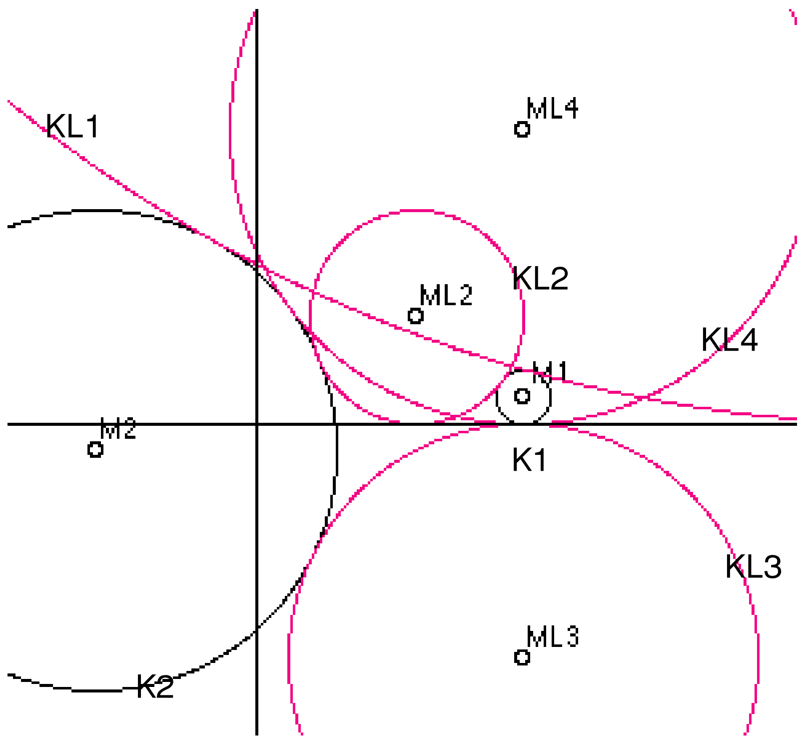
=> K_2 von aussen: $(u + 6)^2 + (v + 1)^2 = (-v + 9)^2$ | ·(-1)

=> -32u -4v + 64 = 16v - 80 => -8u - 5v = -36 => u = (-5v + 36)/8

u in (*) => $(-5v - 44)^2 = 64 \cdot 0$ => v = -44/5 => u = 10 (auch direkt aus (*))

=> **KL_4: $(x - 10)^2 + (y + 44/5) = (44/5)^2$**

$= (x - 10)^2 + (y + 8.8)^2 = 8.8^2$



7. a) N: $(x-6)(x+7)$ ==> $12 = 2\cdot 6$ ......=> 6 ist Nullstelle von Zähler und Nenner
=> $(x^3 - 6x^2 + 2x - 22) : (x-6) = x^2 + 2$ => $(x^2+2)/(x+7)$ --> **38/13**

b) L: $3\hat{}(8 - 8/3 + 8/9 - 8/27......) = 3\hat{}(8\cdot 1/(1+1/3)) = 3^6$
R: $3\hat{}(x + \sqrt{x+1})$
=> $\sqrt{x+1} = 6-x$; => $x^2 - 13x + 35 = 0$ => $x_{12} = (13 \pm \sqrt{29})/2$
Probe => $\mathbf{x = (13 - \sqrt{29})/2 = 3.807}$

c) $\sin x(4\cdot\sin^4 x + 7\cdot\cos^2 x - 4) = 0$; $\sin x = 0$ => $x = 0, \pi, 2\pi$
$z = \sin^2 x$; $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ => $4z^2 - 7z + 3 = 0$ => $z_{12} = (7\pm 1)/8$, $z = 1, 3/4$
=> $\sin x = \pm 1$ => $x = \pi/2, 3\pi/2$
$\sin x = \pm 2/\sqrt{3}$ => $x = \pi/3, 2\pi/3, 4\pi/3, 5\pi/3$
=> $\mathbb{L} = \{0, \pi/2, \pi/2, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 3\pi/2, 5\pi/3, 2\pi\}$