Matur 8

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

Zeit: 4 Stunden

1. a) Löse: $e^{4\cdot\ln(3)} \cdot e^{-\frac{4}{3}\ln(3)} \cdot e^{\frac{4}{9}\ln(3)} \cdot e^{-\frac{4}{27}\ln(3)} \cdot e^{\frac{4}{81}\ln(3)} \cdot \ldots = 3^{\sqrt{x+3}} \cdot 3^x$

b) Beweise die Volumen-Formel für einen geraden Kreiskegelstumpf.

c) Zwischen den Punkten A und B liegt ein Hindernis so, dass die Strecke $\overline{AB}$ nicht direkt gemessen werden kann. Zur Bestimmung von $\overline{AB}$ werden nun zwei Punkte P und Q auf **derselben** Seite der Geraden (AB) gewählt. Es wird gemessen: $\overline{AP} = 345{,}7$m; $\overline{PQ} = 287{,}3$m; $\overline{BQ} = 264{,}9$m; $\sphericalangle APQ = 102{,}7°$; $\sphericalangle PQB = 97{,}4°$; $\overline{AB} = ?$

2. Gegeben: $f(x) = \dfrac{x^3 + a}{4x}$; $a \in \mathbb{R}$

a) Bestimme den Parameter a so, dass f bei x = 2 ein Extremum hat.

Im Folgenden sei a = –8.

b) Diskutiere f (Definitionsbereich, Pole, Nullstellen, Extrema, Wendepunkte, Gleichungen der Asymptoten, Graph **G** für $-4 \leqslant x \leqslant 6$).

c) Gib die Gleichung der Kurvennormalen n im Wendepunkt von **G**. Berechne die ersten Koordinaten aller Schnittpunkte von n mit **G**.

3. Gegeben sind die Geraden g_1: $4x + 3y - 18 = 0$ und g_2: $3x - 4y - 1 = 0$ sowie der Kreis K: $x^2 + y^2 - 16x - 24y + 183 = 0$.

a) Bestimme alle Punkte auf K, die von g_1 und g_2 gleiche Abstände haben.

b) Gib die Radien aller Kreise an, die beide Koordinatenachsen und K berühren (3 signifikante Ziffern).

4. Einer Halbkugel mit Radius r ist die gerade dreiseitige Pyramide mit regulärer Grundfläche und maximalem Volumen einbeschrieben. Die Spitze der Pyramide liegt im Zentrum der Kreisscheibe, welche zur Halbkugel gehört. Bestimme die Grundkante a, die Höhe h sowie die Oberfläche O dieser Pyramide.

5. a) Zeichne den Graphen von $f(x) = (1 - x^2) \cdot e^{-x}$ für $-2 \leqslant x \leqslant 6$. Bestimme dazu auch die Nullstellen, Extrema und Wendepunkte.

b) Eine Stammfunktion von f hat die Form $F(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^{-x} + d$. Bestimme a, b, c und d.

c) Bestimme die Fläche, welche zwischen den Nullstellen von der x-Achse und der Kurve eingeschlossen wird. Bestimme auch die Fläche, die im 4. Quadranten von der Kurve und ihrer Asymptote begrenzt wird.

d) Wie lautet die Gleichung der Tangente an die Kurve im Punkt P(1 | ...) ?

6. Gegeben: $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $E_1: 2x - 2y - z - 9 = 0$

E_2 durch A(1 | 2 | 4), B(2 | 2 | 6) , C(3 | 5 | 2).

a) Bestimme den Winkel zwischen der Ebene E_1 und der Geraden g sowie den Spiegelpunkt von P(2 | -6 | -2) bezüglich E_1.

b) Beweise, dass die Ebenen E_1 und E_2 parallel sind und bestimme ihren Abstand.

c) Welches ist der Durchstosspunkt von g durch E_2 ?

d) Gib eine Parametergleichung für die Schnittgerade s von E_2 mit π_2.

7. a) Nadia gewinnt einen Preis, wenn sie bei 5 Würfen mit einem Würfel mindestens eine Sechs wirft. Marco kann ebenfalls einen Preis gewinnen, und zwar, wenn er bei 32 Würfen mit zwei Würfeln mindestens eine Doppelsechs wirft. Wer hat bessere Gewinnchancen? Mit wievielen Würfen wären Marcos Gewinnchancen grösser als 80% ?

b) Ein Blick in die Zukunft: Auch im Jahre 2010 gibt es in der Mathe-Matur 7 Aufgaben, allerdings sind nur noch Kreuzchen zu malen. Zu jeder Aufgabe gibt es nämlich 4 Auswahlantworten, von denen jeweils genau eine richtig ist. Pawel hat seine Prioritäten bei anderen Fächern und wählt darum alle 7 Antworten zufällig. Wie stehen seine Chancen, mindestens 5 der 7 Fragen richtig zu beantworten?

c) 9 Schülerinnen vergleichen ihre Geburtsmonate. Bestimme unter der Voraussetzung, dass jeder der 12 Monate als Geburtsmonat gleich wahrscheinlich ist, die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: Niemand hat im ersten Quartal Geburtstag.

B: Mindestens 2 Schülerinnen haben denselben Geburtsmonat.

C: Im ersten Quartal liegen 3, in den andern liegen je 2 Geburtstage.

Matur 8: Lösungen

1. b) $3\hat{}(4 - 4/3 + 4/9 - 4/27 +-..) = 3\hat{}(\sqrt{x+3} + x)$

g.R. $a = 4$, $q = -1/3 \Rightarrow s = 4/(1+1/3) = 3 \Rightarrow 3 = \sqrt{x+3} + x$ |quadr.

$\Rightarrow 9 - 6x + x^2 = x + 3 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = (x - 6)(x - 1)$

Probe: $x_1 = 6$: $3 = 3 + 6$ f!; x_2 : $3 = 2 + 1$ r $\Rightarrow$ **$x = 1$**

c) $f(x)$: $m = -(r_1-r_2)/h = (y - r_1)/(x - 0)$; mit $P(0|r_1)$

$\Rightarrow f(x) = y = (r_2-r_1)x/h + r_1$

$\Rightarrow y^2 = (r_2-r_1)^2x^2/h^2 + 2\cdot(r_2-r_1)xr_1/h + r_1^2$

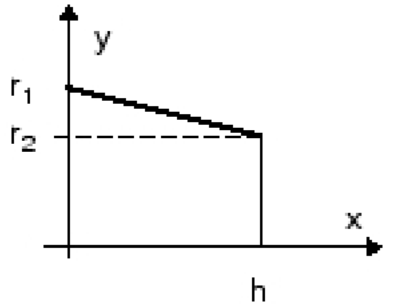
$\Rightarrow V = \pi\cdot{}_0\int^h y^2dx$

$= \pi\cdot[(r_2-r_1)^2x^3/3h^2 + (r_2-r_1)x^2r_1/h + r_1^2x]_0^h$

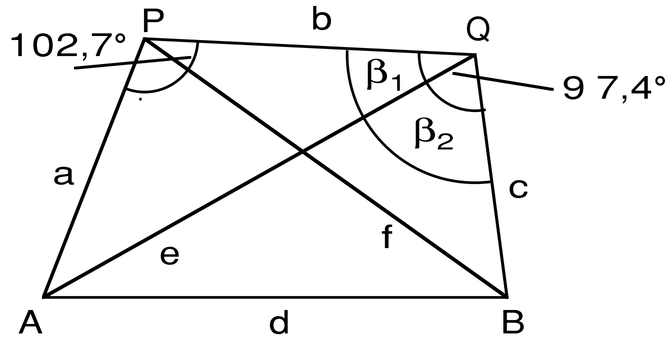
$= \pi\cdot((r_2-r_1)^2h/3 + (r_2-r_1)hr_1 + r_1^2h)$

$= \pi h/3\cdot(r_2^2 - 2r_2r_1 + r_1^2 + 3r_2r_1 - 3r_1^2 + 3r_1^2)$

$= \boldsymbol{\pi h/3 \cdot (r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)}$



d)



$e = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos 102{,}7°}$

$= 495{,}7$

$\sin\beta_1 = a\cdot\sin 102{,}7°/e$

$\Longrightarrow \beta_1 = 42{,}9°$

$\Longrightarrow \beta_2 = 54{,}5°$

($f = 415{,}1$; $\alpha_1 = 39{,}3°$; $\alpha_2 = 63{,}4°$)

$\overline{AB} = d = \sqrt{e^2+c^2-2ec\cdot\cos\beta_2}$

$=$ **404,4 (m)**

2. $f'(x) = (2x^3 - a)/4x^2$; $f''(x) = (x^3 + a)/2x^3$

a) $f'(2) = 0 \Rightarrow 2 = \sqrt[3]{a/2} \Rightarrow$ $\mathbf{a = 16}$ $(f''(2) = (8 + 16)/16 \neq 0)$

b) $f'(x) = (x^3 + 4)/2x^2$; $f''(x) = (x^3 - 8)/2x^3$

$D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, Pol bei $x_1 = 0$, Nullstelle bei $x_2 = 2$

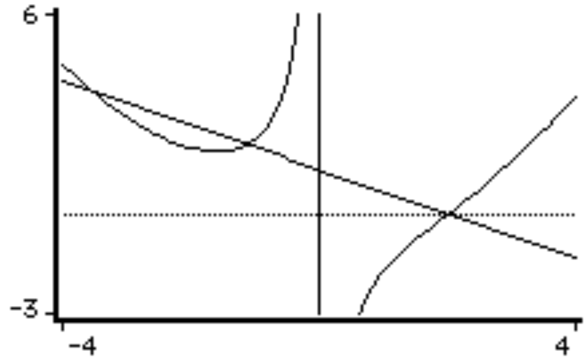
$f'(-\sqrt[3]{4}) = 0$, $f''-(\sqrt[3]{4}) = 3/2 > 0 \Rightarrow$ **$T(-\sqrt[3]{4} \mid 3/\sqrt[3]{4}) = T(-1.59 \mid 1.89)$**

$f''(2) = 0$, f''wechselt Zeichen

von - auf + => **WP(2 | 0)**

$f(x) = x^2/4 - 2/x \Rightarrow$ **$A(x) = x^2/4$**

vert. As.: $x = 0$



c) $f'(2) = 3/2$

$\Rightarrow m_n = -2/3 = (y - 0)/(x - 2)$

$\Rightarrow$ **n: $y = -2/3 \cdot x + 4/3$**

$n \cap G_f$: $-2/3 \cdot x + 4/3 = (x^3 - 8)/4x$

$\Rightarrow 3x^3 - 24 = -8x^2 + 16x$

$\Rightarrow 3x^3 + 8x^2 - 16x - 24 = 0$; $\mathbf{x_1 = 2}$

$(3x^3 + 8x^2 - 16x - 24):(x - 2) = 3x^2 + 14x + 12$

$3x^2 + 14x + 12 = 0 \Rightarrow x_{23} = (-14 \pm 2\sqrt{13})/6 =$ **$1/3 \cdot (-7 \pm \sqrt{13})$**

$x_1 = 2$; $x_2 = -1.13$; $x_3 = -3.54$

3. K: $(x - 8)^2 + (y - 12)^2 = 25$;

$M(8|12)$, $r=5$

a) w_{12}: $4x + 3y - 18 = \pm(3x - 4y - 1)$

w_1: $x + 7y - 17 = 0 \Rightarrow x = 17 - 7y$

w_2; $7x - y - 19 = = \Rightarrow y = 7x - 19$

$w_1 \cap K$:

$((17 - 7y) - 8)^2 + (y - 12)^2 = 25$

$\Rightarrow 50y^2 - 150y + 200 = 0$;

$\Rightarrow y^2 - 3y + 4 = 0$; $D = -7$

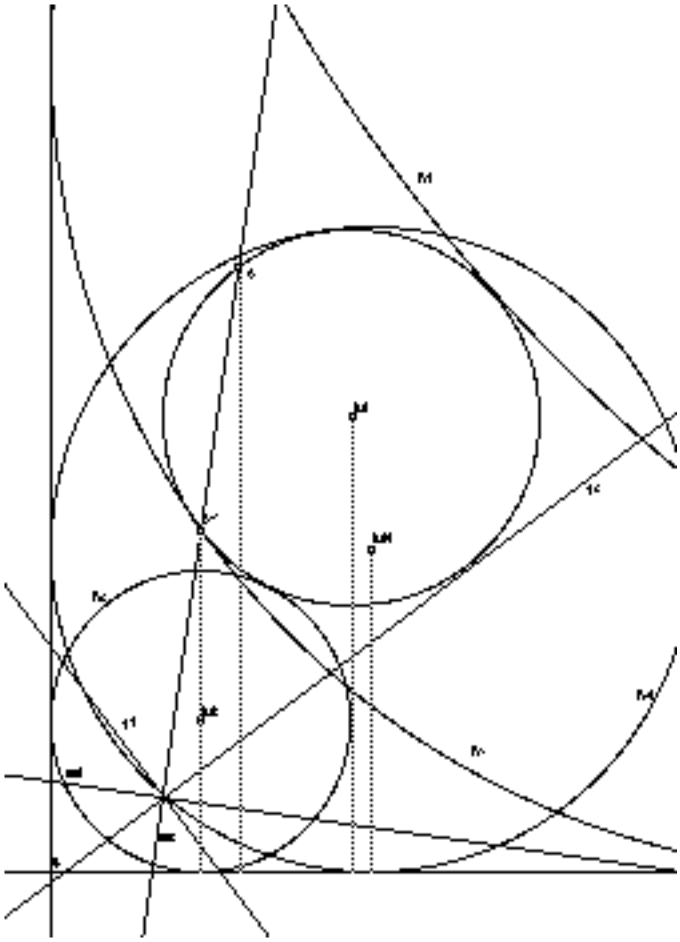
$w_2 \cap K$:

$(x - 8)^2 + ((7x - 19) - 12)^2 = 25$

$\Rightarrow 50x^2 - 450x + 1000 = 0$;

$\Rightarrow x^2 - 9x + 20 = (x - 4)(x - 5) = 0$

$\Rightarrow$ $\mathbf{P_1(4|9);\ P_2(5|16)}$



b) ges: $M'(u|v)$, r'.

Berühren:

x-Achse von oben $\Rightarrow v = r'$

y-Achse von rechts $\Rightarrow u = r'$

b_1) K von aussen

$\Rightarrow \overline{M'M} = r' + 5$

$\Rightarrow (8 - r')^2 + (12 - r')^2 = (r' + 5)^2$

$\Rightarrow r'^2 - 50r' + 183 = 0$

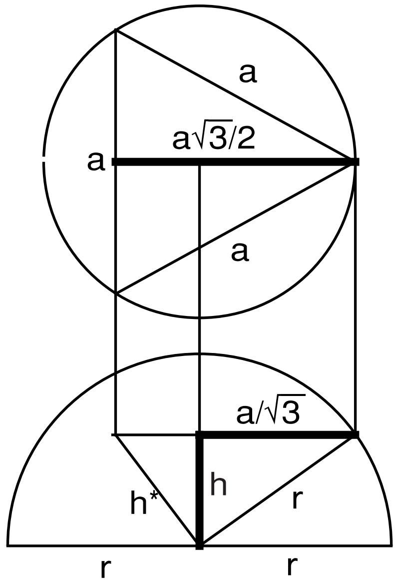
$\Rightarrow r'_{12} = 25 \pm \sqrt{442}$,

$\mathbf{r'_1 = 46.02,\ r'_2 = 3.976}$

b_2) K umfassend $\Rightarrow \overline{M'M} = r' - 5 \Rightarrow (8 - r')^2 + (12 - r')^2 = (r' - 5)^2$

$\Rightarrow r'^2 - 30r' + 183 = 0 \Rightarrow r'_{12} = 15 \pm \sqrt{42}$, $\mathbf{r'_1 = 21.48,\ r'_2 = 8.519}$

4. $h^2 + a^2/3 = r^2 \Rightarrow a^2/3 = r^2 - h^2$



$V = 1/3 \cdot a^2\sqrt{3}/4 \cdot h$
$V(h) = \sqrt{3}/4 \cdot (r^2 - h^2)\cdot h$; $\mathbf{\overline{V}(h) = r^2h - r^3}$

$\overline{V}'(h) = r^2 - 3h^2 = 0 \Rightarrow \mathbf{h = r/\sqrt{3}}$
$(\overline{V}''(h) = -6h < 0$ für $h > 0 \Rightarrow$ Max)
$\Rightarrow a^2/3 = r^2 - r^2/3 = 2r^2/3 \Rightarrow \mathbf{a = r\sqrt{2}}$

oder; $V(a) = 1/3 \cdot a^2\sqrt{3}/4 \cdot \sqrt{r^2-a^2/3} = a^2/12 \cdot \sqrt{3r^2-a^2}$
$\overline{V}'(a) = (6ar^2-3a^3)/\sqrt{3r^2-a^2} \Rightarrow a = r\sqrt{2}$

$h^{*2} = h^2 + (1/3\cdot a\sqrt{3}/2)^2 = r^2/3 + a^2/12 = r^2/2$

$O = a^2\sqrt{3}/4 + 3\cdot 1/2\cdot a\cdot r/\sqrt{2}$
$\quad = r^2\sqrt{3}/2 + 3r^2/2 = \mathbf{r^2/2 \cdot (\sqrt{3} + 3)}$

5. a) $f'(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{-x}$

$f''(x) = (-x^2 + 4x - 1)e^{-x}$

$N_{12}(\pm 1|0)$, E: $x = 1 \pm \sqrt{2}$

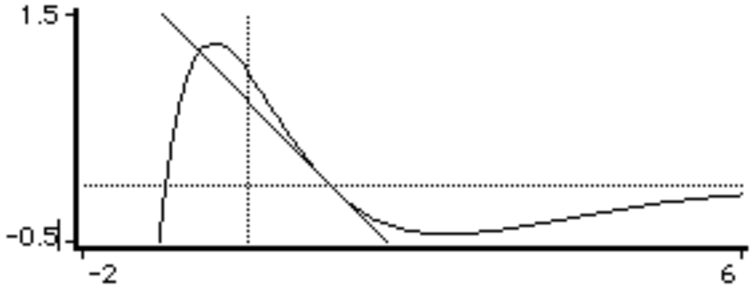
H(-0.414| 1.25)

T(2.41| -0.432)

W: $x = 2 \pm \sqrt{3}$

W_1(3.73|-0.310)

W_2(0.268|0.710)



b) $F'(x) = (-ax^2 + (2a-b)x + (b-c))e^{-x} = (1 - x^2)\cdot e^{-x}$

=> **a = 1; b = 2; c = 1 ; d bel.; $F(x) = (x^2 + 2x + 1)e^{-x}$**

c) $_{-1}\int^1 f(x)dx = 4e^{-1} - 0 =$ **4/e = A = 1.47**

$\lim_{k\to\infty}\ {}_1\int^k f(x)dx = \lim_{k\to\infty} (k^2 + 2k + 1)e^{-k} - 4/e = -4/e$ => **A = 4/e**

c) $f'(1) = -2/e = (y - 0)/(x - 1)$ => **t: $y = -2x/e + 2/e$**

6. a) $\sin\alpha = |(1|1|1)(2|-2|-1)/(\sqrt{3}\cdot 3))| = 1/(\sqrt{3}\cdot 3)$ ==> **α = 11.10°.**

l: $\vec{r} = \overrightarrow{OP} + t\cdot\vec{n}$ = .(2|-6|-2) + t·(2|-2|-1);

$l \cap E_1$: 2(2+2t)-2(-6-2t)-(-2-t)-9 = 0 => 9t + 9 = 0 => t = -1 => FD(0|-4|-1);

$\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{PF}$ = (0|-4|-1) + (-2|2|1) => **P*(-2|-2|0)**

b) E_2: $\vec{R} = \overrightarrow{OA} + u\cdot\overrightarrow{AB} + v\cdot\overrightarrow{AC}$ = (1|2|4) + u·(1|0|2) + v·(2|3|-2)

=> E_2: 2x - 2y - z + 6 = 0. **$\vec{n}_1 = \vec{n}_2$ => $E_1 \parallel E_2$.**

HNF_1: (2x - 2y - z - 9)/3 = 0; **$\overline{AE_1}$** = |(2 - 4 - 4 - 9)/3| = |-5| = **5**

c) $g \cap E_2$: 2(2+t)-2(3+t)-t+6 = 0 => -t + 4 = 0; t = 4; => **D(6|7|4)**

d) $g \cap E_2$: S_y(0|3|0); S_z(0|0|6)

=> **s: $\vec{r}$ = (0|3|0) + t·(0|-3|6)** [s: $\vec{r}$ = (3|0) + t·(-3|6)]

7. a) $P_1 = 1 - P(\text{keine } 6) = 1 - (5/6)^5 =$ **0.598**

$P_2 = 1 - P(\text{keine } 66) = 1 - (35/36)^{32} =$ **0.594**

$P_2(n) = 1 - (35/36)^n > 0.8$ => n > 57.1 => **n = 58**

b) $P = \sum_{k=5}^{7} \binom{7}{k} \cdot 0.25^k \cdot 0.75^{7-k} = 21\cdot 9/4^7 + 7\cdot 3/4^7 + 1/4^7$

$=$ **$211/4^7$ = 0.0129**

c) P(A) = **$(3/4)^9$ = 0.0751**

P(B) =1 - P(alle S. haben versch, Geb.m) = 1 - 12/12 · 11/12 · .... · 4/12 = 1 - 11!/ $(6\cdot 12^8)$ = 1 - 0.01547 = **0.9845**

$P(C) = \binom{9}{3}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}/4^9 =$ **0.02884**