

Matur 9

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

Zeit: 4 Stunden

1. a) Bestimme alle Lösungen:

$$3\sin x - \sin x + \frac{1}{3}\sin x - \frac{1}{9}\sin x + \frac{1}{27}\sin x - + \dots = 3^{\log_9 4} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

b) Plutonium hat eine Halbwertszeit von $2.44 \cdot 10^4$ Jahren. Bestimme die Zerfallsfunktion in der Form $M(t) = M_0 \cdot b^t$ (M_0 : Anfangsmenge, t : Zeit in Jahren). Wie lange dauert es, bis von ursprünglich 300kg Plutonium nur noch 0.001kg übrig ist ?

c) Im Dreieck ABC mit $b = 6.18$, $c = 4.85$, $\gamma = 33.8^\circ$ sind a , α und β gesucht.

2. Gegeben: $f(x) = (a + bx) : x^2$; $a, b \in \mathbb{R}$; $b \neq 0$

a) Bestimme a und b so, dass $W(3 | 2)$ ein Wendepunkt ist.

Für das Folgende sei $a = -2$, $b = 4$.

b) Diskutiere f .

c) Im Punkt $P(-2 | ?)$ hat die Funktionskurve die Normale n . Bestimme die Gleichung von n sowie die x -Koordinaten aller Schnittpunkte von n mit der Kurve.

d) Berechne die Fläche zwischen Kurve, x -Achse und den Geraden $g_1: x = e$ und $g_2: x = e^2$ ($e = 2.71828182\dots$).

3. Gegeben: Ebene $E_1: 2x - 2y + z - 3 = 0$; Punkt $P(7 | -5 | 6)$.

a) Berechne den Abstand a des Punktes P von E_1 und den Winkel α zwischen E_1 und π_1 .

b) Welche Punkte auf der x -Achse haben von E_1 und von π_2 gleiche Abstände ?

c) Ein Lichtstrahl g geht von P aus, durchdringt π_3 senkrecht und wird an E_1 reflektiert. In welchem Punkt trifft der reflektierte Strahl g^* auf die Ebene $E_2: y = 10$ und welchen Weg hat er bis dahin zurückgelegt ?

4. Einer Kugel mit Radius 1 ist die regelmässige 8-seitige Pyramide mit maximalem Volumen einbeschrieben. Wieviel % des Kugelvolumens beträgt das Pyramidenvolumen ?

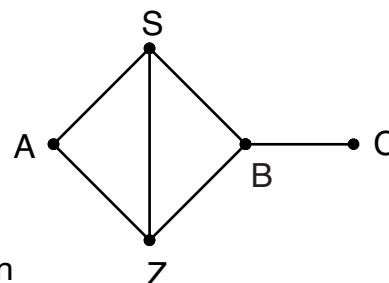
5. Gegeben: Kurve $k: y = e^{p \cdot x} - 1; x \geq 0, p \in \mathbb{R}$.

a) Bestimme p so, dass sich k und die Gerade $g: y = x - 1$ berühren. Gib auch den Berührungspunkt B an.

b) Bestimme p so, dass das Quadrat mit den Ecken $A(0 | 0), B(1 | 0), C(1 | 1), D(0 | 1)$ durch k in zwei flächengleiche Teile zerlegt wird.

c) Nun sei $p = \ln(2)$. Das Quadrat $ABCD$ erzeugt bei Rotation um die x -Achse einen Körper; die Kurve k erzeugt dabei eine trichterförmige Fläche, welche den Körper in zwei Teilkörper zerlegt. Bestimme das Verhältnis der Volumina dieser beiden Teilkörper in der Form $1 : \dots$.

6. a) Ein Käfer startet eine Irrfahrt auf dem nebenstehenden Gitter im Punkt S . In jedem Gitterpunkt wählt er zufällig einen der möglichen Wege. Im Punkt Z hockt eine hungrige Kröte! Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Käfer nach vier durchlaufenen Teilstrecken noch lebt ?



b) In der Volleyball-Nacht spielt eine Schülerauswahl (S) gegen eine Lehrerauswahl (L). Ein Spiel ist beendet, wenn eine Gruppe 3 Sätze gewonnen hat. Aus Erfahrung ist bekannt, dass L 60% aller Sätze gegen S gewinnt. Nun hat aber S den ersten Satz gewonnen! Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt jetzt die Schülerauswahl das Spiel?

c) Die Gerantin im Restaurant Granbuffo weiss aus Erfahrung, dass durchschnittlich 10% der gemachten Reservationen nicht beansprucht werden. Daher nimmt sie Reservationen für 62 Plätze entgegen, obwohl nur 59 vorhanden sind. Wie gross ist das Risiko, dass es zu wenig Plätze hat ?

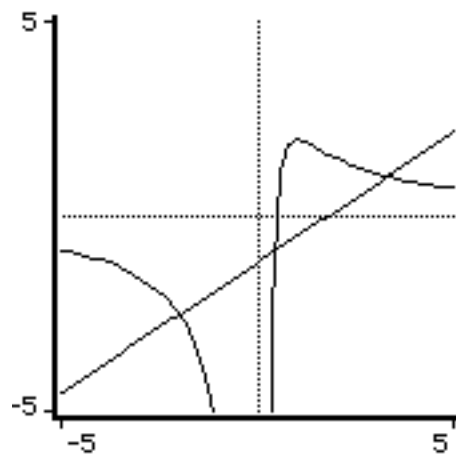
7. Gegeben: $K_a: x^2 + y^2 - 6x - 26y + 153 = 0$; $K_b: x^2 + y^2 + 6x + 8y - 75 = 0$

a) Bestimme die Gleichungen der Tangenten von $P(0 | 21.5)$ an K_a .

b) Bestimme die Gleichung *aller* Kreise, die die x -Achse und K_a und K_b berühren (irrationale Grössen auf 3 geltende Ziffern runden).

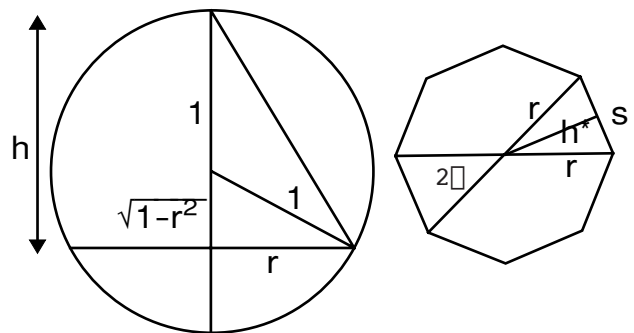
Matur 9: Lösungen

1. a) $L: a = 3, q = -1/3, s = 3 \cdot 1/(4/3) = 9/4$
 $R: ((3^2)^{\log_9(4)})^{0,5} = 4^{0,5} = 2, \sin(\pi/2 - x) = \cos x$
 $9/4 \cdot \sin x = 2 \cdot \cos x \implies \tan x = 8/9 \implies \mathbf{L = \{x \mid x = 0.727 + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\}}$
- b) $\alpha) M(t) = M_0 \cdot 0.5^{t/24'400} = M_0 \cdot (0.5^{1/24400})^t = \mathbf{M_0 \cdot 0.999'9715^t}$
 $\beta) 10^{-3} = 300 \cdot b^t \implies \ln(1/300'000) = t \cdot \ln b \implies \mathbf{t = 443'905 [J]}$
- c) $c < b \implies (sSw)!$; $\sin \gamma : c = \sin \beta : b \implies \sin \beta = b \cdot \sin \gamma / c = 0.7088$
 $\implies \mathbf{\beta_1 = 45.1^\circ, \alpha_1 = 101.1^\circ, a_1 = c \cdot \sin \alpha / \sin \gamma = 8.56}$
 $\implies \mathbf{\beta_2 = 134.9^\circ, \alpha_2 = 11.3^\circ, a_2 = 1.71}$
2. a) $f'(x) = (-bx - 2a)/x^3; f''(x) = (2bx + 6a)/x^4$
 $f''(3) = 0 \implies x = -3a/b = 3$
 $\implies a = -b; f(3) = (a + 3b)/9 = 2b/9 = 2 \implies$
 $\mathbf{b = 9, a = -9}$
- b) $f'(x) = 4(1 - x)/x^3; f''(x) = 4(2x - 3)/x^4;$
Pol bei $x_1 = 0, N(0.5 \mid 0), D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 $E: x_2 = 1; Zw: + \rightarrow - \implies \mathbf{H(1 \mid 2)}$
 $W: x_3 = 3/2, Zw: \implies \mathbf{W(3/2 \mid 16/9)}$
 $\lim f(x) = 0 (x \rightarrow \pm\infty), A: x = 0, y = 0$
- c) $P(-2 \mid -5/2); f'(-2) = -3/2 \implies m_n = 2/3$
 $2/3 = (y + 5/2)/(x + 2)$
 $\implies \mathbf{n: y = 2/3 \cdot x - 7/6}$
 $n \cap k: 2/3 \cdot x - 7/6 = (-2 + 4x)/x^2 \implies 4x^3 - 7x^2 - 24x + 12 = 0 \mid : (x + 2)$
 $\implies 4x^2 - 15x + 6 = 0; x_{45} = (15 \pm \sqrt{129})/8; \mathbf{x_3 = 3.29; x_4 = 0.455}$
- d) $\int f(x) dx = \int (-2/x^2 + 4/x) dx = 2/x + 4 \cdot \ln x \Big|_e^{e^2} = 2/e^2 + 8 - 2/e - 4$
 $= \mathbf{(4e^2 - 2e + 2)/e^2 = 3.53}$



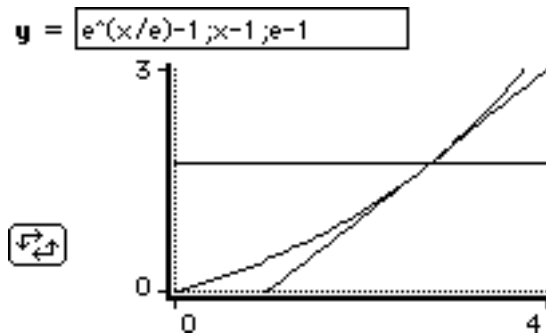
3. a) $\overline{PE} = \pm 1/3 \cdot (2 \cdot 7 - 2 \cdot (-5) + 6 - 3) = \pm 9 \Rightarrow \overline{PE} = 9$
 $\vec{n}_1 = (2|-2|1), \vec{n}_2 = (0|0|1), \cos \alpha = |1/3| \Rightarrow \alpha = 70.5^\circ$
- b) $W_{1,2}: 1/3 \cdot (2x - 2y + z - 3) = \pm x$
 $W_1: x + 2y - z + 3 = 0 \quad W_2: 5x - 2y + z - 3 = 0$
 $W_1 \cap x\text{-Achse}: P_1(-3 | 0 | 0), W_2 \cap x\text{-Achse}: P_2(3/5 | 0 | 0)$
- c) $g: \vec{r} = \overrightarrow{OP} + \vec{n}(\pi_3) = (7|-5|6) + t \cdot (0|1|0)$
 $g \cap E_1: 2 \cdot 7 - 2 \cdot (-5 + t) + 6 - 3 = 0 \Rightarrow t = 27/2 \Rightarrow R(7 | 17/2 | 6)$
 $l: \vec{r} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{n}(E_1) = (7|-5|6) + t \cdot (2|-2|1)$
 $l \cap E_1: 2 \cdot (7 + 2t) - 2 \cdot (-5 - 2t) + (6 + t) - 3 = 0 \Rightarrow t = -3 \Rightarrow D(1 | 1 | 3)$
 $\overrightarrow{OP}^* = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{PD} = (1|1|3) + (-6|6|-3) \Rightarrow P^*(-5 | 7 | 0)$
 $g^*: \vec{r} = \overrightarrow{OR} + t \cdot \overrightarrow{P^*R} = (7 | 17/2 | 6) + t \cdot (12 | 3/2 | 6)$
 $g^* \cap E_2 \Rightarrow 17/2 + t \cdot 3/2 = 10 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow S(19 | 10 | 12)$
 $s = \overline{PR} + \overline{RS} = 27/2 + \sqrt{(12^2 - (3/2)^2 + 6^2)} = 27/2 + 27/2 = 27$

4. $\alpha = 22.5^\circ$
 $\cos(\alpha) = h^*/r \Rightarrow h^* = r \cdot \cos(\alpha)$
 $\sin(\alpha) = s/(2r) \Rightarrow s = 2r \cdot \sin(\alpha)$
 $V(r) = Gh^*/3 = 2\sqrt{2}r^2$
 $= 1/3 \cdot 8/2 \cdot 2r^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (1 + \sqrt{1-r^2})$
 $\overline{V}(r) = r^2 \pm r^2 \cdot \sqrt{1-r^2}$
 $\overline{V}'(r) = 0 = 2r \pm (2r \cdot \sqrt{1-r^2} + r^2/2 \cdot (-2r)/\sqrt{1-r^2})$
 $= 2r \cdot \sqrt{1-r^2} \pm (2r \cdot (\sqrt{1-r^2})^2 - r^3/\sqrt{1-r^2})$
 $\Rightarrow 2r \cdot \sqrt{1-r^2} \pm (2r(1-r^2) - r^3) = 0 \quad | :r \Rightarrow 2 \cdot \sqrt{1-r^2} = \pm(3r^2 - 2)$
 $\Rightarrow 4(1-r^2) = 9r^4 - 12r^2 + 4 \Rightarrow 9r^4 = 8r^2 \Rightarrow r = 2\sqrt{2}/3$
 $\Rightarrow \sqrt{1-r^2} = 1/3 \Rightarrow h = 4/3; h^* = 0.871, V(K) = 4.1888; V(P \text{ mit } +!) = 1.117$
 $\Rightarrow V(P)/V(K) = 0.267 = 26.7\%$

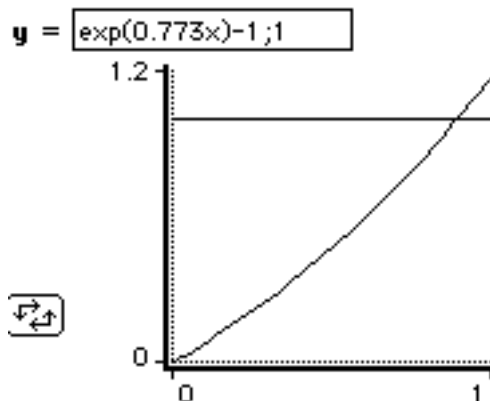


- Variante: $h = 1 \pm \sqrt{1-r^2} \Rightarrow r^2 = 1 - (h-1)^2 = -h^2 + 2h$
 $\Rightarrow \overline{V}(h) = (-h^2 + 2h) \cdot h = -h^3 + 2h^2, \overline{V}'(h) = -3h^2 + 4h = 0 \Rightarrow h = 4/3 \text{ etc.}$
 Variante: $x = \sqrt{1-r^2} \Rightarrow h = 1 + x, r^2 = 1 - x^2, \overline{V}(x) = (1+x)(1-x^2) \Rightarrow x = 1/3..$

5. a) $k \cap g: e^{pa} = a$
 $k' = g': p \cdot e^{pa} = 1$
 a aus I in II $\Rightarrow pa = 1$
 $pa = 1$ in I $\Rightarrow e = a \Rightarrow p = 1/e$
B(e | e - 1)



b) $e^{pa} - 1 = 1 \Rightarrow a = \ln 2/p$
 $0.5 = 1 \cdot (1 - \ln 2/p) + \int_0^{\ln 2/p} (e^{px} - 1) dx$
 $= 1 - \ln 2/p + [e^{px}/p - x]_0^{\ln 2/p}$
 $= 1 - \ln 2/p + e^{\ln 2/p} - \ln 2/p - (e^0/p)$
 $= 1 - \ln 2/p + 2/p - \ln 2/p - 1/p$
 $= (p + 1 - 2\ln 2)/p = 0.5$
 $\Rightarrow p = 4\ln 2 - 2 = 0.773$



Variante: $p = \ln 2/a$
 $0.5 = \int_0^a y dx + (1-a) = 2a/\ln 2 - a - a/\ln 2 + 1 - a$
 $= a(1 - 2\ln 2)/\ln 2 + 1$
 $\Rightarrow a = \ln 2 / (2(2\ln 2 - 1))$
 $\Rightarrow p = \ln 2/a = 2(2\ln 2 - 1)$

c) $V_i = \pi \int_0^1 y^2 dx = \pi \int (e^{2x \cdot \ln 2} - 2e^{x \cdot \ln 2} + 1) dx$
 $= \pi [e^{2x \cdot \ln 2} / (2 \cdot \ln 2) - 2e^{x \cdot \ln 2} / \ln 2 + x]_0^1$
 $= \pi/2 \cdot \ln 2 \cdot [4 - 8 + 2 \cdot \ln 2 - 1 + 4]$
 $= \pi [1 - 1/2 \cdot \ln 2] = \pi \cdot 0.279 = 0.8754; v_{Zyl} = \pi$
 $\Rightarrow V_a = V_{Zyl} - V_i = \pi - V_i = \pi(2 \cdot \ln 2) = \pi \cdot 0.721$
 $V_i : V_a = \pi \cdot 0.279 : \pi \cdot 0.721 = 1 : 2.59 = 0.386 : 1$

6. a) $P(SZ) = 1/3$ $P(SAZ) = 1/3 \cdot 1/2$
 $P(SBZ) = 1/3 \cdot 1/3$ $P(SASZ) = 1/3 \cdot 1/2 \cdot 1/3$
 $P(SBSZ) = 1/3 \cdot 1/3 \cdot 1/3$ $P(SASAZ) = (1/3 \cdot 1/2)^2$
 $P(SBSBZ) = 1/3 \cdot 1/3 \cdot 1/3 \cdot 1/3$ $P(SASBZ) = 1/3 \cdot 1/2 \cdot 1/3 \cdot 1/3$
 $P(SBSAZ) = 1/3 \cdot 1/3 \cdot 1/3 \cdot 1/2$ $P(SBCBZ) = 1/3 \cdot 1/3 \cdot 1 \cdot 1/3$
 $\Rightarrow \bar{P} = 1/3 + 1/3 \cdot 1/2 + 1/9(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/9 + 1/6 + 1/6 + 1/3)$
 $= 1/2 + (36 + 18 + 12 + 9 + 4 + 6 + 6 + 12)/324 = (162 + 103)/324$
 $= 265/324 = 0.781 \Rightarrow P = 1 - \bar{P} = \mathbf{59/324 = 0.182}$
einfacher: $P(SASAS) + P(SASBS) + P(SASBC) + P(SBSBS) + P(SBSAS) +$
 $P(SBSBC) + P(SBCBS) + P(SBCBC)$
 $= 1/36 + 1/54 + 1/54 + 1/81 + 1/54 + 1/81 + 1/27 + 1/27 = 59/324$
- b) $P = P(SS) + P(SLS) + P(SLLS) + P(LSS) + P(LSLS) + P(LLSS)$
 $= 0.4^2 + 0.4 \cdot 0.6 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.6^2 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.4^2 + 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.6 \cdot 0.4 + 0.6^2 \cdot 0.4^2$
 $= 0.4^2(1 + 2 \cdot 0.6 + 3 \cdot 0.6^2) = \mathbf{0.5248 = 328/625}$
einfacher: $P(\bar{E}) = P(LLL) + P(LLSL) + P(LSLL) + P(SLLL)$
 $= 0.6^3(1 + 3 \cdot 0.4) = 0.4752 \Rightarrow P = 1 - 0.4752 = \mathbf{0.5248}$
- c) $P(62) = 0.9^{62} = 0.0014557$
 $P(61) = 62 \cdot 0.9^{61} \cdot 0.1^1 = 0.0100273$
 $P(60) = \binom{62}{2} \cdot 0.9^{60} \cdot 0.1^2 = 1891 \cdot 0.9^{60} \cdot 0.1^2 = 0.0339814$
 $P(62, 61 \text{ oder } 60 \text{ Personen erscheinen}) = 0.0454643 = \mathbf{0.0455}$

7. $K_a: (x - 3)^2 + (y - 13)^2 = 25; K_b: (x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 100$

a) t: $y = mx + 21.5; M_a(3|13), r_a = 5$

$$\Rightarrow \pm 5 = (3m - 13 + 21.5) / \sqrt{m^2 + 1} = (6m + 17) / (2 \cdot \sqrt{m^2 + 1})$$

$$\Rightarrow 100m^2 + 100 = 36m^2 + 204m + 289 \Rightarrow 64m^2 - 204m - 189 = 0$$

$$\Rightarrow m_{1,2} = (204 \pm 300) / 128, m_1 = 63/16, m_2 = -3/4$$

$$\Rightarrow t_1: y = 63/16 \cdot x + 43/2 \Rightarrow \mathbf{63x - 16y + 344 = 0}$$

$$t_2: y = -3/4 \cdot x + 43/2 \Rightarrow \mathbf{3x + 4y - 86 = 0}$$

b) K: $M(u|v), r; x$ -Achse kann nur von oben berührt werden $\Rightarrow v = +r$

b1) K_a und K_b von aussen berühren:

$$\overline{M_a M}^2 = (3 - u)^2 + (13 - r)^2 = (5 + r)^2 \quad \Rightarrow u^2 - 6u - 36r + 153 = 0 \quad | \cdot 1$$

$$\overline{M_b M}^2 = (-3 - u)^2 + (-4 - r)^2 = (10 + r)^2 \quad \Rightarrow u^2 + 6u - 12r - 75 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$-u - 2r + 19 = 0 \Rightarrow r = (19 - u) / 2 \quad \text{in (I.)} \quad \text{oder: I - 3 \cdot II}$$

$$\Rightarrow u^2 + 12u - 189 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = -6 \pm 15 \Rightarrow u_1 = 9, r_1 = 5; u_2 = -21, r_2 = 20$$

$$\mathbf{K_1: (x - 9)^2 + (y - 5)^2 = 25 ; K_2: (x + 21)^2 + (y - 20)^2 = 400}$$

b2) K_a umfassend und K_b von aussen berühren:

$$\overline{M_a M}^2 = (3 - u)^2 + (13 - r)^2 = (r - 5)^2 \quad \Rightarrow u^2 - 6u - 16r + 153 = 0 \quad | \cdot 1$$

$$\overline{M_b M}^2 = (-3 - u)^2 + (-4 - r)^2 = (10 + r)^2 \quad \Rightarrow u^2 + 6u - 12r - 75 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$-12u - 4r + 228 = 0 \Rightarrow r = -3u + 57 \quad \text{in (I.)} \quad \text{oder: 3 \cdot I - 4 \cdot II}$$

$$\Rightarrow u^2 + 42u - 759 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = -21 \pm 20 \cdot \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow u_1 = 13.641, r_1 = 16.077; u_2 = -55.64, r_2 = 223.92$$

$$\mathbf{K_3: (x - 13.6)^2 + (y - 16.1)^2 = 258.5 ;}$$

$$\mathbf{K_2: (x + 55.6)^2 + (y - 223.9)^2 = 50'140.2}$$