Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik

Beschreibende Statistik

1. In einer Klinik kommem während eines Monats 28 Kinder mit den folgenden Geburtsgewichten (in kg) zur Welt:
2.90 3.29 2.72 3.49 2.92 3.10 3.33 2.80 3.62 4.39 3.15 3.95 2.95 3.42 2.52 3.21 2.61 3.51 3.58 3.01 3.71 3.18 3.89 3.39 2.85 4.05 3.40 3.21.
a) Wähle eine Klasseneinteilung mit günstigen Klassenmitten und erstelle eine Tabelle mit folgenden Spalten: Klassengrenzen, Strichliste, abs. Häufigkeit n_i, Klassenmitte x_i, rel. Häufigkeit $h(x_i)$.
b) Ermittle dort, wo es sinnvoll ist, die Spaltensumme.
c) Zeichne ein Histogramm.

2. Die 28 SchülerInnen einer 1. DMS-Klasse erzielen am Sporttag beim Weitsprung folgende Weiten in Metern:
2.90 3.29 2.72 3.49 2.92 3.10 3.33 2.80 3.62 4.39 3.15 3.95 2.95 3.42 2.52 3.21 2.61 3.51 3.58 3.01 3.71 3.18 3.89 3.39 2.85 4.05 3.40 3.21.
a) Wähle für das erste Klassenintervall $2.5 < x \leqslant 2.7$ und erstelle eine Tabelle mit folgenden Spalten: Klassengrenzen, Strichliste, Klassenmitte x_i, abs. Häufigkeit n_i, rel. Häufigkeit $h(x_i)$.
b) Ermittle dort, wo es sinnvoll ist, die Spaltensumme.
c) Zeichne ein Histogramm.
d) Berechne mit den Werten x_i aus **deiner** Tabelle die Zahlen $\overline{x}$, Z, s

3. Eine Lehrerin führt dieselbe Prüfung bei zwei verschiedenen aber gleichgrossen Klassen durch. Sie erhält zweimal den gleichen Durchschnitt $\overline{x}$ = 4.57. Die Standardabweichung ist bei der ersten Klasse $s_1 = 0.68$, bei der zweiten Klasse jedoch $s_2 = 1.13$.
Was lässt sich über die Noten in den beiden Klassen sagen ?

4. Bei welcher Art von Verteilung der Messwerte führt der Mittelwert $\overline{x}$ zu falschen Vorstellungen über die Verteilung ?
(Skizze und kurze Erläuterung)

5. Angenommen, die Standardabweichung s einer Reihe von Messwerten ist Null. Was lässt sich über die Messwerte sagen ?

6. Skizziere (nur grob) zwei Histogramme von Verteilungen, die
a) denselben Mittelwert $\overline{x}$ und denselben Zentralwert Z, aber verschiedene Standardabweichungen s haben
b) gleiches $\overline{x}$, aber verschiedenes Z haben.

7. Skizziere je eine Kurve, die grosso modo zu einer Häufigkeitsverteilung mit folgenden Parametern passt:
a) $\overline{x} = 8.8$, $s = 2.4$, $Z = 8.5$ (= Zentralwert = Median)
b) $\overline{x} = 8.5$, $s = 1.1$, $Z = 8.5$ c) $\overline{x} = 8.5$, $s = 4.3$. $Z = 10.5$

8. Bei 50 Exemplaren einer Meeresschildkrötenart wurde Anzahl der abgelegten Eier gezählt:

Anzahl Eier	9	10	11	12	13	14	15	16
abs. Häufigkeit	2	4	6	9	13	8	5	3

Bestimme $\overline{x}$, s , Z (=Median).

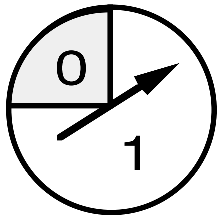
9. Erkläre möglichst anschaulich, was die Teile in der Formel für die Standardabweichung s bedeuten (ev. mit Skizze).

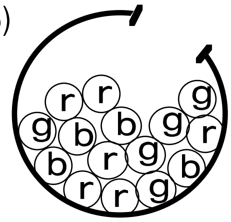
10. Es seien 100 Messswerte $x_1, .., x_i, .. x_{100}$ samt ihren relativen Häufigkeiten gegeben.
a) Welche Zahl ergibt sich, wenn alle $h(x_i)$ addiert werden ?
b) Erkläre das Ergebnis von a).

11. Bei einer Schraubenfeder wurden für die Belastungen 5N, 10N, 15N, 20N, 25N nacheinander die Auslenkungen 16.1cm, 19.6cm, 22.8cm, 26.6cm, 30.1cm gemessen.
Nach dem Hooke´schen Gesetz liegen die Messpunkte (x-Koordinate = Belastung, y-Koordinate = Auslenkung) auf einer Geraden.
Bestimme die Gleichung der am besten passenden Geraden und gib auch den Korrelationskoeffizienten für die beiden Datenreihen an.
(nur Berechnung samt Dokumentation)

Zufallsversuche 1

12. Gib für die beiden Zufallsgeräte (Glücksrad, Urne) in einer Tabelle alle Ergebnisse ω und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $P(\omega)$ an:

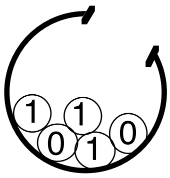
a) 

b) 

13. Bekannt : $P(A) = 1/2$, $P(B) = 5/12$, $P(\overline{A \cup B}) = 1/4$.
Gesucht: $P(A \cap B)$, $P(A \cap \overline{B})$, $P(\overline{A} \cap B)$, $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

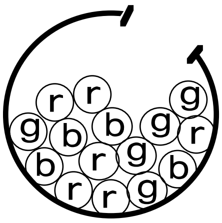
14. Ein Würfel wird 2mal geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: Augensumme grösser als 5
B: Augensumme kleiner als 9
C: Augenprodukt grösser als 6
D: mindesten einmal Augenzahl 3

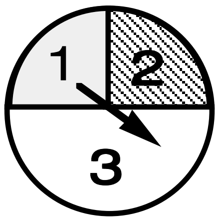
15. 

a) Aus nebenstehender Urne wird 2mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen. Zeichne den Baum für dieses Experiment und gib in einer Tabelle $P(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ an. Bestimme ausserdem die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
A: 2 gleiche Ziffern B: 2 verschiedene Ziffern

b) Gleiche Fragen wie oben, aber jetzt wird jeweils die gezogene Kugel nicht zurückgelegt.

16. 

Aus dieser Urne mit roten, grünen und blauen Kugeln wird 3mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse "genau 2mal grün" und "mindestens einmal rot".

17. 

Dieses Glücksrad wird 3mal gedreht und aus den gezogenen Ziffern eine dreistellige Zahl gebildet. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
a) "123" b) "gerade Zahl" c) "Quersumme ist 6"

18. Ein altes Flugzeug hat 4 Triebwerke. Jedes Triebwerk übersteht einen Transatlantikflug mit der Wahrscheinlichkeit 19/20. Zum Fliegen braucht die Maschine mindestens 2 Triebwerke. Mit welcher Wahrscheinlichkeit übersteht sie den Flug?

19. a) Es seien A, B, C Ereignisse und P die passende Wahrscheinlichkeitsfunktion. Gib drei Eigenschaften von P an.
b) Was Ist ein L-Versuch?

20. Was ist ein L-Versuch ?

21. Erkläre an einem sebst gewählten Beispiel folgende Begriffe:
a) Zufallsversuch
b) Laplace-Versuch
c) Ergebnis
d) Ereignis
e) relative Häufigkeit
f) Stichprobenraum
g) Wahrscheinlickeit eines Ereignisses

22. Unter welcher Bedingung gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$?

Zufallsversuche 2

23. In einer Urne liegen 2 weisse und 3 schwarze Kugeln. Frau Weiss und Herr Schwarz ziehen abwechselnd eine Kugel **ohne** Zurücklegen. Wenn Frau Weiss eine weisse oder Herr Schwarz eine schwarze Kugel zieht ist das Spiel zu Ende und Frau Weiss bzw. Herr Schwarz hat gewonnen. Frau Weiss beginnt.
Zeichne einen vollständigen Baum für dieses Spiel und gib die Gewinnchancen von Frau Weiss und Herrn Schwarz an.

24. 75% der Kugeln in einer Urne sind rot, der Rest ist grün. Es wird zweimal eine Kugel ohne Zurücklegen gezogen. Das Ereignis "zwei verschiedenfarbige Kugeln" hat die Wahrscheinlichkeit 5/13. Wieviele grüne Kugeln waren es ?

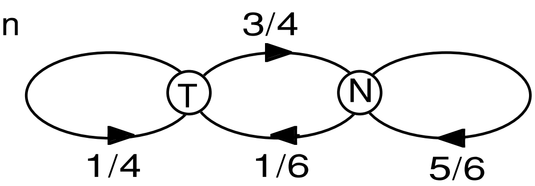
25. a) Ist es wahrscheinlicher, mit einem Würfel bei drei Würfen mindestens eine Sechs oder mit drei Würfeln bei 100 Würfen mindestens eine dreifache Sechs zu werfen ?
b) Wieviele Würfe mit drei Würfeln sind nötig, damit das Ereignis "mindestens eine dreifache Sechs" eine Wahrscheinlichkeit von 0.99 oder mehr hat ?

26. In einem Raum befinden sich 10 Personen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben mindestens zwei von ihnen am gleichen Tag eines Monats Geburtstag (z.B. 1 Person am 17. Januar, eine andere am 17. April) unter der Annahme, dass jeder Monat 30 Tage hat und dass alle Tage gleich wahrscheinlich sind?

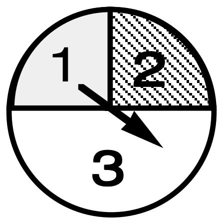
27. In einer Urne befinden sich 20 rote Kugeln und eine unbekannte Anzahl grüner Kugeln. Beim zweimaligen Ziehen einer Kugel - ohne Zurücklegen - ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses "zwei gleichfarbige Kugeln" gleich 41/77. Wieviele grüne Kugeln waren es ?

28. In einer Urne liegen 50 weisse und 50 schwarze Kugeln. Frau Weiss und Herr Schwarz ziehen abwechselnd eine Kugel ohne Zurücklegen. Frau Weiss beginnt. Wenn Frau Weiss eine weisse oder Herr Schwarz eine schwarze Kugel zieht ist das Spiel zu Ende und Frau Weiss (Herr Schwarz) hat gewonnen. Das Spiel wird spätestens dann abgebrochen, wenn Herr Schwarz die zweite Kugel gezogen hat.
Zeichne einen vollständigen Baum für dieses Spiel und gib die Gewinnchancen von Frau Weiss und Herrn Schwarz an.

29. Nebenstehende Figur zeigt das Verhalten des Wetters in Humidonien.
Heute ist Sonntag und es ist nass (N).
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es
a) am Dienstag b) am Donnerstag trocken (T) ist ?



30. Nebenstehendes Glücksrad wird 2mal gedreht und mit der ersten erhaltenen Ziffer die Zehner-, mit der zweiten die Einerziffer der Zahl X gebildet.



a) Zeichne einen vollständigen Baum.
b) Gib in einer Tabelle zu jedem Ergebnis $\omega \in \Omega$ die zugehörige Wahrscheinlichkeit $P(\omega)$ an.
c) Bestimme die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:

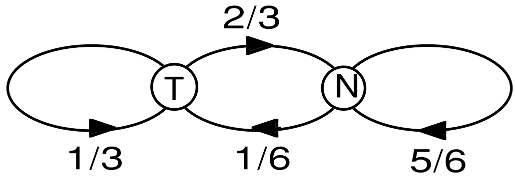
$A = \{ X \mid X = 22\}$ $B = \{ X \mid X \text{ ist gerade}\}$ $C = \{ X \mid X > 12\}$ $D = \overline{A}$

$E = B \cap C$ $F = B \cup C$ $G = \{ X \mid X \text{ hat 2 gleiche Ziffern}\}$

31. Eine Urne enthält 100´000 Kugeln mit den Nummern 00´000 bis 99´999. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gezogene Kugel **keine** Ziffer 5 enthält ?

32. In einer Urne liegen 3 weisse und 4 schwarze Kugeln. 2 Spielerinnen ziehen abwechslungsweise eine Kugel **ohne** Zurücklegen. Siegerin ist, wer zuerst a) eine weisse b) eine schwarze Kugel zieht.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Spielerin gewinnt?

33. Nebenstehende Figur zeigt das Verhalten des Wetters in Humidonien.
Heute ist Sonntag und es ist nass (N).
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es
a) am Dienstag b) am Donnerstag trocken (T) ist ?



34. In einer Urne liegen 4 rote Kugeln (r), 3 blaue (b) und eine schwarze (s). Es werden 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
a) Bestimme den Stichprobenraum Ω sowie in einer Tabelle für jedes $\omega \in \Omega$ die Wahrscheinlichkeit $P(\omega)$.
b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
E_1: 2 Kugeln gleicher Farbe; E_2: lauter verschiedenfarbige Kugeln;
E_3: die zweite Kugel ist rot; E_4: beide Kugeln sind schwarz
$E_5 = \overline{E_1}$

35. Beim **alten** Schweizer Zahlenlotto wurden die 6 Gewinnzahlen und die Zusatzzahl aus den Zahlen 1, 2, ..., 42 ausgewählt. Berechne die Wahrscheinlichkeiten für
a) einen Sechser b) einen Fünfer mit Zusatzzahl
c) einen Fünfer d) einen Dreier
e) eine Niete (weniger als 3 Richtige)

36. In eine Kiste mit 50 geprüften, garantiert einwandfreien Uhrwerken gelangen unglücklicherweise noch 2 fehlerhafte Werke hinzu. Nun müssen die Uhrwerke einzeln (zufällig) herausgenommen und nochmals geprüft werden, bis die zwei fehlerhaften Stücke gefunden sind.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind gerade
a) die ersten beiden Werke die beiden fehlerhaften ?
b) das erste und das letzte Werk die beiden fehlerhaften ?

37. Auf jeder der 10 Karten eines Stapels ist ein Buchstabe aufgedruckt. Sibyll mischt die Karten und legt sie dann der Reihe nach hin. Beim Aufdecken der Karten ergibt sich das Wort "RYCHENBERG". Sie mischt die Karten wieder und lässt Jürg nacheinander 5 Karten ziehen und sie der Reihe nach hinlegen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich jetzt das Wort "GERNE" ergibt ?

38. Auf den Seitenflächen eines Würfels sind die Buchstaben A, B und C je 2 mal aufgemalt. Der Würfel wird 6 mal geworfen und die erscheinenden Buchstaben notiert. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das entstehende Wort jeden der drei Buchstaben zweimal enthält ?

39. Aus einer Urne mit 2 schwarzen und 3 lila Kugeln ziehen Frau Schwarz und Herr Lila abwechselnd eine Kugel **mit** Zurücklegen. Frau Schwarz beginnt. Es gewinnt, wer zuerst eine Kugel seiner Farbe zieht.
Wie stehen die Chancen für Frau Schwarz?

40. Es werden 4 L-Würfel geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:
a) mindestens eine Augenzahl ist eine Quadratzahl
b) es gibt lauter verschiedene Augenzahlen
c) es erscheinen mindestens 2 gleiche Augenzahlen
d) die Augensumme ist 6

41. In der 20-köpfigen Klasse 3cD wird ein Vorstand aus 3 Personen mit dem Los bestimmt.
a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass gerade die 3 Freundinnen Andrea, Mirjam und Monika den Vorstand bilden ?
b) Wie stehen die Chancen dafür, dass genau 2 von ihnen in den Vorstand kommen ?

42. In einer **riesigen** Sendung von Transistoren sei der Anteil fehlerhafter Stücke p%. Die Empfängerfirma führt folgenden Eingangstest durch: Stichprobe S_1 mit 5 Stück ziehen; Anzahl fehlerhafter Stücke f_1.

$f_1 = 0$ ==> Sendung annehmen
$f_1 > 1$ ==> Sendung zurückweisen
$f_1 = 1$ ==> Stichprobe S_2 mit 20 Stück ziehen; fehlerhafte Stücke: f_2.
$f_2 > 1$ ==> Sendung zurückweisen
andernfalls Sendung annehmen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Sendung angenommen
a) allgemein b) für p = 20?

43. A liefert an B 10 Geräte und behauptet, alle seien fehlerfrei, obwohl sich ein fehlerhaftes darunter befindet. B traut A nicht und beschliesst, 5 der 10 Geräte zu testen (das ist ein aufwendiges Verfahren!) und die Sendung anzunehmen, wenn alle 5 einwandfrei sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit entscheidet B falsch ?

44. a) Die unzertrennlichen Freundinnen F. und P. fehlen an keiner Party. F. hat stets ein Ürnchen mit doppelt so vielen weissen wie schwarzen Kugeln dabei und offeriert folgendes Spiel: Beide Spieler ziehen abwechselnd eine Kugel ohne Zurücklegen. Es gewinnt, wer zuerst eine Kugel seiner Farbe zieht. F. hat immer weiss und lässt immer ihren Partner beginnen. Würde das Spiel spätestens nach dem zweiten Zug des Partners abgebrochen, so gewänne dieser mit der Wahrscheinlichkeit 67/165. Wieviele Kugeln von jeder Farbe waren es am Anfang? Wie gross sind die Gewinnchancen von F. und die von ihrem Partner?
b) P. ihrerseits wettet, sobald mehr als 15 Personen an der Party anwesend sind, dass es unter diesen Personen mindestens 2 gibt, deren Telefonnum- mern mit dem gleichen Zahlenpaar enden. Wie gross sind die Gewinnchancen von P.? Wieviele Personen müssten mindestens anwesend sein, damit P.´s Chancen grösser als 75% sind?

45. In der Tour de Winterthur fahren die Mannschaften aus Australien, Belgien, aus der Schweiz, aus Deutschland, England und Frankreich dicht hintereinander durchs Ziel, die Fahrer jeder Mannschaft geschlossen hintereinander. Von den ursprünglich 5 Fahrern jeder Mannschaft haben 2 Australier, 2 Schweizer und 1 Belgier aufgegeben. Auf wieviele Arten kann dieser Zieleinlauf vor sich gehen ?

46. Im Schulzimmer gibt es 20 Sitzplätze für SchülerInnen. An einer Übung nehmen 6 SchülerInnen teil. Auf wieviele Arten können sie sich setzen ?

47. In der 6. Klasse sind für die neue Matur 8 von 16 Fächern auszuwählen.

a) Wieviele Wahlmöglichkeiten gäbe es, wenn keine Einschränkungen bestünden ?

b) Die 16 Fächer sind nun aber in 4 Gruppen zu 4 Fächern zusammengefasst; aus jeder Gruppe müssen 2 Fächer gewählt werden. Wieviele Möglichkeiten gibt es jetzt ?

c) Eine andere Schule bietet dieselben Fächergruppen an, aber es dürfen 1, 2 oder 3 Fächer pro Gruppe gewählt werden. Frage wie bei b)

48. Ein Car mit 35 EC-Eulach - Anhängern (darunter 5 bekannte Radaubrüder), wird von der Polizei angehalten und 7 Fans werden zur Personenkontrolle nach draussen gebeten.

a) Wieviele verschiedene solcher 7-er-Fangrüppchen kann die Polizei bilden ?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind in einem zufällig ausgewählten 7-er-Grüppchen gerade alle 5 Rabauken ?

c) wie b) aber mit "mindestens 3 Rabauken" !

49. Bestimme den Koeffizienten von $m^{26}n^3$ in der Entwicklung von $(m + n)^{?}$!

50. Wieviele Würfe mit drei Würfeln sind nötig, damit das Ereignis "mindestens eine dreifache Sechs" eine Wahrscheinlichkeit von 0.99 oder mehr hat ?

51. Willhelm ist ein schlechter Schütze; er trifft ein Ziel mit der Wahrscheinlichkeit 0.25.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Willhelm mit 10 Schüssen mindestens einmal trifft ?

b) Wie oft muss er schiessen, damit das Ereignis "mindestens ein Treffer" eine Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.999 hat? (mit Probieren!)

52. a) Vereinfache: $2kn(2n-1)!$ b) Vereinfache: $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$

c) Beweise: $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}$

53. In einer Sendung mit 35 elektronischen Geräten sind 5 fehlerhaft. Zu Testzwecken werden 7 von diesen 35 Geräten zufällig ausgewählt.
a) Auf wieviele Arten kann dies geschehen ?
b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter diesen 7 Geräten gerade alle 5 fehlerhaften Geräte sind ?
c) wie b) aber mit "mindestens 2 fehlerhafteGeräte".

54. Für eine Prüfung werden von 10 bekannten Problemen deren 5 ausgewählt. Die Prüfung ist bestanden, wenn alle diese 5 Probleme gelöst sind. Stefan hat sich gut vorbereitet: 9 dieser 10 Probleme kann er sicher lösen. Vom zehnten Problem weiss er aber nicht einmal, wie er es anpacken soll, geschweige denn wie die Lösung aussehen könnte. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht er die Prüfung trotzdem ?

55. Ist es wahrscheinlicher, mit einem Würfel bei drei Würfen mindestens eine Sechs oder mit drei Würfeln bei 100 Würfen mindestens eine dreifache Sechs zu werfen ? (Antwort begründen)

56. Vreneli hat in ihrem Setzkasten genau 13 Buchstaben: zwei A, ein B, ein C, vier D, zwei E, drei F.
a) Wieviele verschiedene Wörter der Länge 13 kann sie setzen ?
b) Wieviele verschiedene Wörter der Länge 12 kann sie setzen ?

57. Beweise: $n \cdot \binom{n+k}{k} = (k+1) \cdot \binom{n+k}{k+1}$

58. Die Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 sind auf je eine Karte gedruckt.
a) Auf wieviele Arten lassen sich die 10 Karten nebeneinander legen?
b) Auf wieviele Arten lassen sich von den 10 Karten deren 5 auswählen?
c) Es werden 4 Karten gezogen und die gezogenen Ziffern nebeneinander geschrieben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit entseht so die Zahl "1234", wenn c1) mit, c2) ohne Zurücklegen gezogen wird?

Tests

59. Bisher war das Heilmittel A die einzige Möglichkeit, die seltene aber sehr gefährliche Krankheit Z-Virosis zu bekämpfen; die Erfolgswahrscheinlichkeit betrug 0.8. Ein neuentwickeltes Heilmittel B mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p wurde - nach langen Laborversuchen - an 50 freiwilligen Patienten erprobt. Es wird nun ein Test verlangt, der die Hypothese H_0: $p = 0.8$ gegen H_1: $p > 0.8$ prüft. X sei die Anzahl Erfolge.

a) Bestimme den Verwerfungsbereich V, wenn $\alpha = 1\%$.

b) Bestimme α, wenn $V = \{48, 49, 50\}$.

c) Angenommen, das Heilmittel B hat die Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0.95$. Der Test wird durchgeführt mit dem Verwerfungsbereich aus b). Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit β für einen Fehler zweiter Art (H_0 ist zwar falsch, wird aber nicht verworfen) ?

60. Ein Zufallsgerät in Form eines Tetraeders liefert Zahlen aus der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$. Die Hypothese H_0: P(geworfene Zahl = 1) = 1/4 soll mit einer statistischen Sicherheit von 90% getestet werden. Es wird 20 mal geworfen, davon X mal eine 1 .

a) H_1 = ?

b) Verwerfungsbereich V = ?

c) Es wird X = 6 festgestell. Entscheid ?

d) Es sei X = 11. Welches ist die grösste stat. Sicherheit, mit der wir H_0 verwerfen können? (Beachte H_0 und H_1!). Gib auch den zugehörigen Verwerfungsbereich V´ an.

61. Ein Zufallsgerät, das einen Vokal aus der Menge {A, E, I, O, U} liefert, wird 30 mal betätigt. Es soll die Hypothese H_0: p(Vokal = E) = 0.4 gegen die Alternative H_1: p(Vokal = E) < 0.4 mit der stat. Sicherheit von 99% getestet werden.

a) Bestimme den Verwerfungsbereich V

b) Es sei $X \in V$. Wie wird bei X = 8 entschieden ?

c) Es sei X = 8. Welches ist die grösste stat. Sicherheit, mit der wir H_0 verwerfen können?

62. An einer Prüfung werden den Probanden 20 Aufgaben mit je 4 Auswahlantworten gegeben, von denen jeweils genau eine richtig ist.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird durch blosses Raten mehr als 1/6 der Aufgaben richtig gelöst ?

b) Wieviele richtige Antworten müssen verlangt werden, damit Personen, die blindlings raten, eine Erfolgschance von höchstens 5% haben?

63. In einer Hühnerfarm werden Eier gebrütet. Jedem Ei entschlüpft mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0.4$ ein Hühnchen, mit $p = 0.4$ ein Hähnchen und mit $p = 0.2$ ist das Ei steril.

a) Es werden 20 Eier zufällig ausgewählt. Berechne die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse: a_1) 15 Kücken a_2) mindestens 15 Kücken a_3) 8 Hünchen und 8 Hänchen

b) Jemand kauft 20 Kücken, die angeblich zufällig aus den **geschlüpften Tieren** der Farm ausgewählt wurden. Es stellt sich heraus, dass 15 der 20 Kücken Hänchen sind. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses, wenn die Auswahl tatsächlich zufällig war?

64. Bei einem Würfel soll geprüft werden, ob die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs = 1/6 ist. Es ist ein Test mit 20 Würfen und einer stat. Sicherheit von 70% zu konstruieren; dabei sei X die Anzahl geworfener Sechser.

a) Gib H_0 und H_1 an.

b) Verwerfungsbereich V = ?

c) Wie wird bei X = 6 entschieden ?

d) Wie gross ist die Irrtumswahrscheinlichkeit für $V' = \{0, 7, ..., 20\}$?

e) Angenommen, die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs sei $p = 0.3$. Wie wahrscheinlich ist ein Fehler 2. Art bei V´ aus Aufg. d) ?

Zufallsvariable, Verteilungen

65.

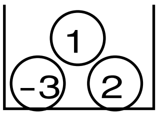
MORGEN IST AUCH EIN TAG

Aus nebenstehender Urne wird zufällig ein Wort gezogen. X sei die Länge dieses Wortes, Y die Anzahl seiner Vokale. Bestimme die Verteilungen der Variablen X sowie $Z = X \cdot Y$. Berechne die Erwartungswerte und die Varianzen von X und Z.

66. Bei einem Spiel darf der Spieler zunächst eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 auswählen. Darauf werden 4 Würfel gleichzeitig geworfen. Erscheint dabei die ausgewählte Zahl 1, 2, 3 oder 4 mal, so erhält der Spieler das 1, 2, 3 bzw. das 4-fache seines Einsatzes und dazu auch noch seinen Einsatz zurück. Andernfalls ist sein Einsatz verloren. X sei der Gewinn in Fr. beim Einsatz von 100 Fr.
Bestimme die Verteilung von X; berechne E(X) und V(X)..

67. Es ist $V(X) = E[(X-\mu)^2]$ mit $\mu = E(X)$.
Beweise: $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

68. In einer Urne liegen 2 grüne und 2 gelbe Kugeln. Eine Spielerin zieht nach- einander Kugeln ohne Zurücklegen. Für jede grüne Kugel erhält sie einen Franken, für jede gelbe muss sie einen Franken bezahlen. Sie darf das Spiel nach dem ersten Zug jederzeit abbrechen. Wie gross ist der Erwar- tungswert für ihren Gewinn, wenn sie die optimale Strategie wählt ? Zeichne den Baum für die optimale Strategie (falls mehrere solche existieren, nimm jene, die am wenigsten Züge enthält)

69. 

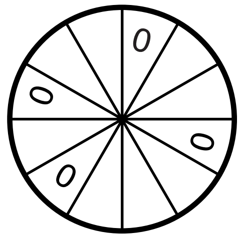
Ein einfaches Spiel: Aus nebenstehender Urne dürfen Kugeln ohne Zurücklegen gezogen werden. Die Nummern auf den Kugeln geben den Gewinn für den jeweiligen Zug an. Mit welcher Strategie wird der Erwartungswert für den Gewinn am grössten, wenn das Spiel jederzeit abgebrochen werden kann ?
Gib diesen Erwartungswert an und zeichne den Baum für die optimale Strategie (falls mehrere solche existieren, nimm jene, die am wenigsten Züge enthält)

70. Ein L-Würfel wird solange geworfen, bis entweder eine Sechs oder 4mal hintereinander keine Sechs erscheint. X sei die Anzahl der nötigen Würfe. Bestimme die Verteilung von X, E(X) und V(X).

71. Die böse Drei: Bei diesem Spiel bezahlt die Spielerin einen Einsatz von 3 Fr. und wirft dann 2 Würfel. Tritt beim Wurf die Augenzahl 3 nicht auf, so erhält die Spielerin die Augensumme in Fr. ausbezahlt. Erscheint die Drei dagegen mindestens einmal, so muss die Spielerin die Augensumme in Fr. bezahlen. Es sei X der Gewinn in Fr.
Bestimme die Verteilung von X. Ist das Spiel fair ? (Antwort begründen)

72. A und B spielen gegeneinander. Wer zuerst 5 Runden gewonnen hat, hat das Spiel gewonnen. Beim Spielstand von 3 : 2 für A muss das Spiel unterbrochen werden.
a) Welche Gewinnchance hat A beim Unterbruch gehabt unter der Annahme, dass A und B gleich stark spielen ?
b)Bestimme den Erwartungswert für die Anzahl noch ausstehender Runden.

73. Wieviele Sektoren des nebenstehenden Glücksrades müssen mit «1Fr.», wieviele mit «3Fr.» beschriftet werden, damit beim Einsatz von 1 Fr. das Spiel fair ist ?



74. Gib die Wertetabelle für die Binominalverteilung mit $n = 6$ und $p = 3/4$ an (vier Nachkommastellen) und zeichne das Histogramm. Berechne auch $E(X)$ und $V(X)$. Stelle $E(X)$ im Histogramm dar.

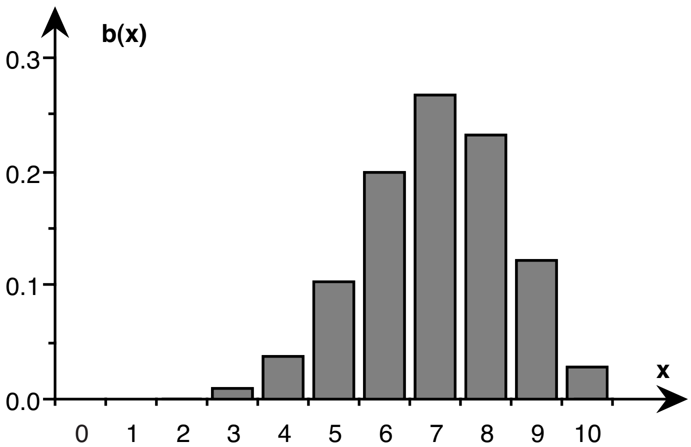
75. Die Binominalverteilung ist folgendermassendefiniert:

$$P(X = x) = b(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

a) Beweise: $b(x+1) = b(x) \cdot \frac{n-x}{x+1} \cdot \frac{p}{1-p}$

b) Zeige an einem Beispiel, wozu diese Formel gebraucht werden kann.

76.



Dies ist das Histogramm der Binominalverteilung mit den Parametern n und p.
a) Bestimme mit Hilfe des Histogramms ungefähr die Zahl $P(X \leqslant 6)$.
b) Gib je einen Wert für n und p an, der möglichst gut zum Histogramm passt.
c) Für welche Parameterwerte wäre diese Verteilung symmetrisch ?

d) X sei binominal verteilt; es sei $n = 30$ und $E(X) = 3.75$. $V(X) = ?$

77. Ein Losverkäufer behauptet, dass 25% der Lose aus seiner Lostrommel Gewinnlose sind. Frau Adler misstraut dem Verkäufer und beobachtet ihn während einer halben Stunde. In dieser Zeit wurden 50 Lose ver kauft.

a) Unter welcher Voraussetzung darf dieser Versuch als Bernullikette betrachtet werden ?

b) Konstruiere für Frau Adler - unter der Voraussetzung von a) - einen Test mit der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.1$.

78. Der Bekanntheitsgrad einer Zahnpasta wird auf 40% geschätzt. Durch die Befragung von 100 zufällig ausgewählten Personen soll diese Schätzung überprüft werden (Die Frage soll lauten: "Was ist Curodent ?"). Konstruiere einen Test mit $\alpha = 0.1$ (H_0, H_1, V).

79. Beweise: $\frac{n}{m+1} \cdot \binom{n+m}{m} = \binom{n+m}{m+1}$

80. Bruno Holenstein hat im, ersten Wahlgang 41.5% der Stmmen erhalten. Kurz vor dem zweiten Wahlgang will die Parteileitung der AVP durch eine Blitzumfrage bei 200 zufällig ausgewählten StimmbürgerInnen erfahren, ob sich Bruno Holenstein´s Wahlchancen verändert haben.

a) Entwirf einen Test (H_0, H_1, V), der diese Frage mit einer statistischen Sicherheit von 95% beantwortet.

b) Angenommen, 100 der 200 befragten Personen würden Bruno Holenstein wählen. Welchen Bescheid gibst Du der Parteileitung?

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik Lösungen

1. d) Berechne mit den Werten x_i aus **deiner** Tabelle die Zahlen $\overline{x}$, Z, s

a) 2,5<x⩽2,7 --> 2,6: 2; 2,8:4; 3:4; 3,2:5; 3,4:5; 3,6:3; 3,8:2; 4:2; 4,2:0; 4,4:1

h(x) = 0.07; 0.14; 0.14; 0.18; 0.18; 0.11; 0.07; 0.07; 0 ; 0.04

b) 28 ; 1 c) $\overline{x}$ = 3.293 ; Z = 3.2; s = 0.447

oder: 2.5 ⩽ x < 2.7 ==> n = 2; 3; 4; 6; 5; 3; 2; 2; 0; 1; $\overline{x}$ = 3.307; s = 0.437; Z = 3.2

d) $\overline{x}$ = 3.291(alle Messwerte)

2. a) 2,5<x⩽2,7 --> 2,6: 2; 2,8:4; 3:4; 3,2:5; 3,4:5; 3,6:3; 3,8:2 ; 4:2; 4,2:0; 4,4:1

h(x) = 0.071; 0.143; 0.143; 0.179; 0.179; 0.107; 0.071; 0.071; 0 ; 0.036

b) 28 ; 1

d) $\overline{x}$ = 3.2929 ; Z = 3.2; s_{n-1} = 0.44715 , s_n = 0.4391

oder: 2.5 ⩽ x < 2.7 ==> n = 2; 3; 4; 6; 5; 3; 2; 2; 0; 1; $\overline{x}$ = 3.307; s = 0.437; Z = 3.2

e) $\overline{x}$ = 3.291(alle Messwerte)

3. 1.Kl: Noten näher bei $\overline{x}$; 2.Kl: Noten weichen im Durchschnitt mehr von $\overline{x}$ ab; mehr extreme Noten, weniger Noten bei $\overline{x}$.

b) Angenommen, die Daten $\overline{x}$ = 4.57, s = 0.68 stammen nicht von einer einzigen Klasse sondern aus einem Test mit 5000 SchülerInnen und die Verteilung der Noten sei ausgesprochen glockenförmig. Was lässt sich jetzt über diese 5000 Noten sagen sagen?

ca. 68% der Noten in [3,89;5,25], 95% in [3,21; 5.93], 99% in [2.53; 6.61]

4. a) schiefe Verteilung: Z ist sinnvoller

(b) allg.: $\overline{X}$ ist nicht der häufigste Wert, muss überhaupt nicht angenommen werden)

5. alle gleich

6. ----

7. a, b: symmetrisch, b halb so breit

c links langer Schwanz, Max zwischen $\overline{x}$ und Z

8. $\overline{x}$ = 12.72, s_{n-1} = 1.7617, s_n = 1.7440, Z = 13

9. Die Abweichungen (Differenzen) der Messwerte x_i vom Mittelwert $\overline{x}$ werden quadriert : $(\overline{x} - x_i)^2$. Von diesen Quadraten wird der Durchschnitt (der Mittelwert) bestimmt; es wird aber durch n-1 statt durch n dividiert. Das ergibt die mittlere quadratische Abweichung der Messwerte x_i vom Mittelwert $\overline{x}$. Die Wurzel aus dieser Zahl ist die mittlere Abweichung der Messwerte x_i vom Mittelwert $\overline{x}$, d.h. die Standardabweichung s.

10. a) 1 b) $\Sigma\, h(x_i) = \Sigma n_i/n = 1/n \cdot \Sigma n_i = 1/n \cdot n = 1$

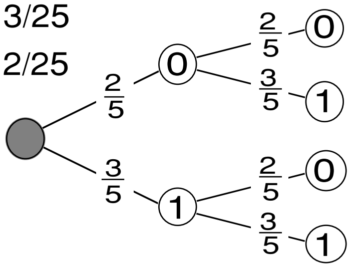
11. Dantenpaare eingeben, lineare Regression, y = 0.7*x + 12.54
R = 0.999706 (="corr")

12. a) P(0) = 1/4 , P(1) = 3/4 d) P(b) = 4/15 , P(g) = 5/15 , P(r) = 2/5

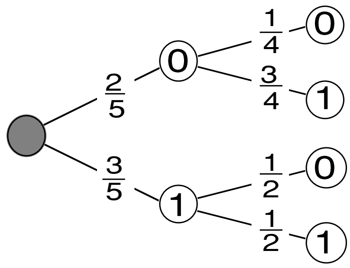
13. $P(A \cap B) = 1/4$; $P(A \cap \overline{B}) = 1/3$; $P(\overline{A} \cap B) = 1/4$; $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1/4$

14. $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 10/36 = 13/18 = 0.722$. Ebenso: P(B) = 13/18 = 0.722 , P(C) = 11/18 = 0.611, P(D) = 11/36 = 0.306

15. P(A) = 13/25
P(B) = 12/25



b) P(A) = 2/5
P(B) = 3/5



16. p("genau zweimal grün) = p(ggr) + p(ggb) + p(grg) + p(gbg) + p(rgg) + p(bgg)= 2/45 + 4/135 + 2/45 + 4/135 + 2/45 + 4/135 = **2/9**
einfacher: $3 \cdot P(gg\overline{g}) = 3 \cdot 5/15 \cdot 5/15 \cdot 10/15 = 2/9$
p("mind einmal rot") = 1 - P("nie rot)"
= 1 - (P(ggg) + P(bbb) + P(ggb) + P(bbg))
= 1 - (1/27 + 64/3375 + 3 · 4/135 + 3 · 6/675)
= 1 - 729/3375 = 2646/3375 = 98/125 = **0.784**
einfacher: $1 - P(\overline{r\,r\,r}) = 1 - (9/15)^3 = 1 - 27/125$ **= 98/125**

17. a) 1/32 b) 1/4
c) 3!·p(123) +p(222) = 13/64 = 0.203

18. $(19/20)^4 + 4\cdot(19/20)^3\cdot 1/20 + 6\cdot(19/20)^2\cdot(1/20)^2 = 159923/160000 = 0.9995187$

oder $p = 1 - (p(4\downarrow) + p(3\downarrow)) = 1 - (1/20)^4 - 4\cdot(1/20)^3\cdot(19/20)$

$= 1 - 77/20^4$

19. a) 1. $P(A) \geqslant 0$; $P(A) \leqslant 1$; 2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

b) alle Ergebnisse haben dieselbe Wahrscheinlichkeit

20. Ein Zufallsversuch, bei dem alle Ausfälle die gleiche Wahrscheinlichkeit haben.

21. ----

22. A und B sind unvereinbar (haben, als Mengen, keine gemeinsamen Elemente)

23. •--- --->S(3/5)---->W(1/2)---->S(4/3)---->W(1/2)--->**S**(1) (unentsch)

↓ ↓ ↓ ↓

W(2/5) **S**(1/2) **W**(1/3) **S**(1/2)

P(weiss) = $2/5 + 3/5\cdot 1/2\cdot 1/3 =$ **0.5**

P(schwarz) = $3/5\cdot 1/2 + 3/5\cdot 1/2\cdot 2/3\cdot 1/2 =$ **0.4**

P(unentschieden) = $3/5\cdot 1/2\cdot 2/3\cdot 1/2\cdot 1 =$ **0.1**

24. •------>g(1/4)------>**gr**(3x/(4x-1)) x: Anz. grüner Kugeln

| 3x : Anz. roter Kugeln

|

r(3/4) P(2 versch. K) = P(gr) + P(rg)

| $= 1/4 \cdot 3x/(4x-1) + 3/4 \cdot x/(4x-1) = 5/13$

=>**x = 10**

|

rg(x/(4x-1))

Tip: Schreibe x für die Anzahl grüner Kugeln und berechene damit die Wahrscheinlichkeit des erwähnten Ereignisses.

25. a) P(in 3 W mind eine 6) = 1 - $(5/6)^3$ **= 0.421 = 91/216**

P(in 100W mind eine 666): 1 Wurf: 6^3 Ausfälle, 6^3-1 davon sind ungünstig

100 Würfe: $(6^3)^{100}$ Ausfälle, $(6^3-1)^{100}$ davon sind ungünstig

==> P = g/m = 1 - $(215/216)^{100}$ **= 0,371 (ungünstiger)**

b) P = 1 - $(215/216)^n > 0.99$ ==> $0.01 \geqslant (215/216)^n$

==> n ⩾ log(0.01)/log(215/216) = 992.4 ==> **n = 993**

26. P = 1 - $30 \cdot 29 \cdot \ldots \cdot 21/30^{10}$ = **0.815**

27. •------>g(x/(20+x))------>**gg**((x-1)/(19+x))   x: Anz. grüner Kugeln

↓

↓

r(20/(20+x))   P(2 gl. K) = P(gg) + P(rr) = 41/77 =

↓   x(x-1)/(20+x)(19+x) + 20·19/(20+x)(19+x)

↓   ==>$36x^2 - 1676x + 13680 = 0$

rr(19/(19+x))   ==> $9x^2 - 419x + 3420 = 0$ ==> **x = 36**

28. -------->S(1/2)------>W(50/99)------>S(49/98)----->W(49/97)(unent)

↓   ↓   ↓   ↓

W(1/2)   **S**(49/99)   **W**(49/98)   **S**(48/97)

P(weiss) = 1/2 + 1/2·50/99·49/98 = **0.626 = 62/99**

P(schwarz) = 1/2·49/99 + 1/2·50/99·49/98·48/97 = **0.310**

P(unentschieden) = 1/2·50/99·49/98·49/97 = **0.0638**

29. a) N ————>T(1/6)————>**T**(1/4)

↓   P = 1/6·1/4 + 5/6·1/6 = 13/72 = 0.181

————>N(5/6)————>**T**(1/6)

b) N ————>Die,T(13/72)————>T(1/4)————>**T**(1/4)

| ↓

| ——————>N(3/4)————>**T**(1/6)

|

↓

————>Die,N(59/72)————>T(1/6)————>**T**(1/4)

↓

——————>N(5/6)————>**T**(1/6)

P = 13/72·(1/4·1/4 + 3/4·1/6) + 59/72·(1/6·1/4 + 5/6·1/6)

= 13/384 + $767/72^2$ = 1885/10368 = **0.1818**

30. b)

Ω = {	11,	12,	13,	21,	22,	23,	31,	32,	33}
$P(\omega)$ =	1/16,	1/16,	1/8,	1/16,	1/16,	1/8,	1/8,	1/8,	.1/4

c) p(A) = 1/16, p(B) = 1/4 , p(C) = 7/8, p(D) = 15/16,
p(E) = 3/16, p(F) = 15/16, p(G) = 3/8

31. p = p(1.Ziffer keine 5)·p(2.Z...)·...·p(5.Ziffer k. 5)
= $(9/10)^5$ = g/m = $9^5/10^5$ = **0,59049**

32. a) p(1.Sp. gewinnt) = 3/7 + 4/7·3/6·3/5 + 4/7·3/6·2/5·1/4·1 = **22/35**
b) p = 4/7 + 3/7·2/6·4/5 = **24/35**

33. a) N ————>T(1/6)————>**T**(1/3)
↓ P = 1/6·1/3 + 5/6·1/6 = 7/36 = **0.194** ————>
N(5/6)————>**T**(1/6)

b) N ————>Die,T(7/36)————>T(1/3)————>**T**(1/3)
| ↓
| ——————>N(2/3)————>**T**(1/6)
|
↓
————>Die,N(29/36)————>T(1/6)————>**T**(1/3)
↓
——————>N(5/6)————>**T**(1/6)

P = 7/36·(1/3·1/3 + 2/3·1/6) + 29/36·7/36
= 7/36(2/9 + 29/36)= $7\cdot 37/36^2$ = 259/1296 = **0.1998**

34. a) r r | 12/56 = 3/14; rb | 12/56 = 3/14; rs | 4/56 = 1/14;
br | 12/56 = 3/14; bb | 6/56 = 3/28; bs | 3/56;
sr | 4/56 = 1/14 ; sb | 3/56
b) $p(E_1)$ = 18/56 = 9/28 = 0.321; $p(E_2) = 1-p(E_1)$ = 19/28 = 0.679
$p(E_3)$ = 28/56 = 1/2 = 0.5; $p(E_4) = 0$ $P(E_5)$ = 19/28 = 0.6786

35. a) $1/\binom{42}{6}$ = 1/5´245´786= 0.000´ 000´ 190´ 629
b) $6/\binom{42}{6}$ = 6/5´245´786 = 3/2´622´893 = 0.000´001´14
c) $\binom{6}{5}\binom{35}{1}/\binom{42}{6}$ = 6·35/5´245´786 = 0.000´ 040´ 032´1
c) $\binom{6}{3}\binom{36}{3}/\binom{42}{6}$/m = 142´800/5´245´786 = 0.0272
d) $[\binom{6}{2}\binom{36}{4} + \binom{6}{1}\binom{36}{5} + \binom{6}{0}\binom{36}{6}]$/m =[883´575 + 2´261´952 + 1´947´792]/m =
5´093´319/5´245´786 = 0.970´935´3

36. a) & b) p = 2/52 · 1/51 = 1/1326 = 0.000´754

37. $p = 1/10 \cdot 2/9 \cdot 2/8 \cdot 1/7 \cdot 1/6 = 1/7560 = 0.000'132$

38. $m = 3^6$; g:6!/(2!·2!·2!) (Perm mit Wiederh) = $\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}$ (verteile die 2 A auf 6 Plätze, dann die 2 B auf die restlichen 4 Plätze) = 90 ;
==> $p = 90/3^6$ = **10/81 = 0.123**

39. p(Sch.) = 2/5 + 3/5·2/5·2/5 + 3/5·2/5·3/5·2/5·2/5 + 3/5·2/5·3/5·2/5·3/5·2/5·2/5...
$2/5\cdot[1 + 6/25 + (6/25)^2 + (6/25)^3 + ...] = 2/5 \cdot 1/(1 - 6/25)$ = **10/19 = 0.526**
oder: x = p(sch) ==> x = 2/5 + 3/5·2/5·x ==> 25x = 10 + 6x ==> x = 10/19

40. a) 1 – p(keine Q.Zahl) = $1 - (4/6)^4 = 1 - 16/81 = 65/81$ = **0.802**
b) 1·5/6·4/6·3/6 = 5/18= **0.278**
c) 1 – 5/18 = 13/18 = **0.722**
d) 6 = 1 + 1 + 1 + 3 (g = 4) = 1 + 1 + 2 + 2 (g = 6)
==> P(Augensumme = 6) = **$10/6^4$ = 0.00772**

41. a) $1/\binom{20}{3}$ = 1/1140 = **0.000877**
b) $g = \binom{3}{2}\cdot\binom{17}{1} = 51$; p = 17/380 = **0.04474**

42. a) P(Ann.) = $(1-p/100)^5$
$+5\cdot(1-p/100)^4\cdot(p/100)\cdot[(1-p/100)^{20} + 20\cdot(1-p/100)^{19}\cdot p/100]$
$\mathbf{= (1-p/100)^5 + 5(p/100)\cdot(1-p/100)^{23}(1 + 19p/100)}$
b) **0.356**

43. Ziehen ohne Zurücklegen: P(5 Stück i.O.) = 9/10 · 8/9 · 7/8 · 6/7 · 5/6 = **0.5**

45. $6!\cdot(5!)^3\cdot 4!\cdot(3!)^2 = 1.075 \cdot 10^{12}$

46. 20·19·18·17·16·15 = 20!/14! = 27'907'200

47. a) $\binom{16}{8}$ = **12870** b) $\binom{4}{2}^4$ = **1296**
c) m(1|1|3|3) + m(1|2|2|3) + m(2|2|2|2) =
$6\cdot\binom{4}{1}^2\cdot\binom{4}{3}^2 + 12\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{2}^2\cdot\binom{4}{3} + 1\cdot\binom{4}{2}^4 = 6\cdot 4^4 + 12\cdot 4^2\cdot 6^2 + 6^4 =$
1536 + 6912 + 1296 = **9744**

48. a) $\binom{35}{7}$ = **6'724'520**
b) $P = 1\cdot\binom{30}{2}/\binom{35}{7} = 435/6724520 = 6.47\cdot 10^{-5}$ = **0.000'0647**
c) $g = \binom{5}{5}\cdot\binom{30}{2} + \binom{5}{4}\cdot\binom{30}{3} + \binom{5}{3}\cdot\binom{30}{4}$ = 435 + 20'300 + 274'050 = 294'785;
m = 6724520 ==> **P = 0.0438**

49. $\binom{29}{3}$ = **3654**

50. $P = 1 - (215/216)^n \geqslant 0.99 \Rightarrow 0.01 \geqslant (215/216)^n$
$\Rightarrow n \geqslant \log(0.01)/\log(215/216) = 992.4 \Rightarrow$ **n = 993**

51. $P_n(E) = 1-0.75^n > 0.999 \Rightarrow n > 24.01 \Rightarrow$ **n = 25**

52. a) k(2n)! b) n/(n+1)!
c) $n!/k!(n-k)! = n(n-1)!/k(k-1)!(n-1-k+1)!$
$= n/k \cdot (n-1)!/(k-1)!(n-1-(k-1))! = n/k \cdot \binom{n-1}{k-1}$

53. a) $\binom{35}{7}$ = **6´724´520**
b) $P = 1 \cdot \binom{30}{2}/\binom{35}{7} = 435/6724520 = 6.47 \cdot 10^{-5} =$ **0.000´0647**
c) $g = \binom{5}{5}\cdot\binom{30}{2} + \binom{5}{4}\cdot\binom{30}{3} + \binom{5}{3}\cdot\binom{30}{4} + \binom{5}{2}\cdot\binom{30}{5} =$ 435 + 20´300 + 274´050 + 1`425´060 = 1´719´845;
m = 6724520 ==> **P = 0.2558**

54. Ziehen ohne Zurücklegen: P(5 gelernte Pr.) = 9/10 · 8/9 · 7/8 · 6/7 · 5/6 = **0.5**

55. a) P(in 3 W mind eine 6) = $1 - (5/6)^3$ **= 0.421 = 91/216**
P(in 100W mind eine 666): 1 Wurf: 6^3 Ausfälle, 6^3-1 davon sind ungünstig
100 Würfe: $(6^3)^{100}$ Ausfälle, $(6^3-1)^{100}$ davon sind ungünstig
==> $P = g/m = 1 - (215/216)^{100}$ **= 0,371 (ungünstiger)**

56. a) 13!//2!·4!·2!·3!) = 6227020800/288 = **10´810´800**
b) Zuerst eine Buchstaben auswählen und weglassen
A =>12!/(4!·2!·3!) = 1´663´200
B oder C => 2· 12!/(2!·4!·2!·3!) = 2 · 831ˆ600 = 1´663´200
D => 12!/(2!·3!·2!·3!) = 3´326´400
E => 12!/(2!·4!·3!) = 1´663´200
F => 12!/(2!·4!·2!·2!) = 2´494´800 => total **10´810´800**

57. L: n·(n+k)! / k!·n!
R: (n+k)·(n+k)! / (k+1)!·(n+k−(k+1)! = (n+k)! / k!·(n−1)! = n·(n+k)! / k!·(n−1)!·n = L

58. a) 10! = 3´628´800
b) 10 tief 5 = 252
c1) 0.1^4 = 0.000´1 c2) 1/10 * 1/9 * 1/8 * 1/7 = 1/5040 = 0.000´1984

59. a) $p(X=50) = 0.8^{50}$; $p(X=49) = 50 \cdot 0.8^{49} \cdot 0.2 = 0.000178$

$p(X=48) = 1225 \cdot 0.8^{48} \cdot 0.2^2 = 0.00109$; $p(X \geqslant 48) = 0.001285$

$P(X=47) = 19600 \cdot 0.8^{47} \cdot 0.2^3 = 0.00437$; $p(X \geqslant 47) = 0.00566$

$p(X=46) = 230'300 \cdot 8.8^{46} \cdot 0.2^4 = 0.0128$; $p(x \geqslant 46) = 0.0185$

==> **V = {47, 48, 49, 50}**

b) a) ==> $p(X \geqslant 48) =$ **0.00129**

c) $p(X \notin V \text{ und } p = 0.95) = 1 - p(X \geqslant 48)$

$= 1 - [1225 \cdot 0.95^{48} \cdot 0.05^2 + 50 \cdot 0.95^{49} \cdot 0.05 + 0.95^{50}] =$ **0.459**

60. a) **H_1: p ≠ 1/4**

b) $\alpha li = \alpha re = 0.05$; $p(X \leqslant 1) = 0.024$; $p(X \leqslant 2) = 0.091$

$p(X \geqslant 8) = 0.102$; $p(X \geqslant 9) = 0.041$ ==> **V = {0, 1, 9, 10, ..., 20}**

c) H_0 nicht verwerfen

d) $p(X \geqslant 11) = 1 - p(X \leqslant 10) = 1 - 0.996 = 0.004 = \alpha re$

==> $\alpha = 2 \cdot \alpha re$ ==> **stat. Sicherheit = 0.992;**

V´= {0, 11, 12, ..., 20}

61. a) Z: Anzahl "E";

$P(Z = 0) = 0.6^{30} = 2.21 \cdot 10^{-7}$; $P(Z = 1) = 30 \cdot 0.6^{29} \cdot 0.4 = 4.42 \cdot 10^{-6}$;

$P(Z = 2) = \binom{30}{2} \cdot 0.6^{28} \cdot 0.4^2 = 4.27 \cdot 10^{-5}$; $P(Z = 3) = 0.00027$;

$P(Z = 4) = 0.00120$ ==> $P(Z \leqslant 4) = 0.00152$;

$P(Z = 5) = 0.00415$ ==> $P(Z \leqslant 5) = 0.00565 < 0.01$;

$P(Z = 6) = 0.01152$ ==> $P(Z \leqslant 6) = 0.01718 > 0.01$ ==> **V = {0, ... ,5}**

b) **H_0 nicht verwerfen**

c) $P(Z = 7) = 0.02634$ ==> $P(Z \leqslant 7) = 0.0435$

$P(Z = 8) = 0.05049$ ==> $P(Z \leqslant 8) = 0.0940$ ==> **α = 9.40%**

62. Gib ein Verfahren an, mit dem sich die Hypothese "Proband rät blindlings" mit einer Sicherheit von 95% verwerfen lässt (H_0, H_1, V).

a) Z: Anz.Treffer. $P(Z = x) = \binom{20}{x} \cdot 0.25^x \cdot 0.75^{20-x}$;

20/6 = 3.33==>Es soll $Z \geqslant 4$ sein.

$P(Z \geqslant 4) = 1 - P(Z \leqslant 3) = 1 - 0.22516 =$ **0.7748**

b) H_0: p = 0.25 (blindes Raten)

H_1: p > 0.25 (p < 0.25 ist hier nicht sinnvoll)

$p(Z \leqslant 7) = 0.898$; $P(Z \leqslant 8) = 0.959$

==> $P(z \geqslant 8) = 0.102$; $P(Z \geqslant 9) = 0.041$ ==> **V = {9, 10, .., 20}**

63. Lässt sich die Hypothese "Auf der Farm wurde bei der Auswahl dieser 20 Kücken nicht manipuliert" mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0.05 verwerfen?

a_1) $P = \binom{20}{15} \cdot 0.8^{15} \cdot 0.2^5 = \mathbf{0.175}$

a_2) $P = \Sigma \binom{20}{k} \cdot 0.8^k \cdot 0.2^{20-k}$; $k=15...20 = \Sigma \binom{20}{k} \cdot 0.2^k \cdot 0.8^{20-k}$; $k = 0..5 = \mathbf{0.804}$;
(oder Tabelle: $n = 20$, $p = 0.2$ $P(X \leqslant 5) = 0.8042$)

a_3) $P = \binom{20}{16} \cdot 0.8^{16} \cdot 0.2^4 \cdot \binom{16}{8} \cdot 0.5^{16} = 0.2182 \cdot 0.1963 = \mathbf{0.0429}$

b) H_0: P(Hähnchen) = 0.5 ; H_1: P(Hähnchen) > 0.5; Z: Anz. Hähnchen
$P(Z \geqslant 15) = 1 - P(Z \leqslant 14) = 1 - 0.979 = 0.021 < 5\%$ ==> **H_0 verwerfen**

64. a) H_0: P(Sechs) = 1/6; H_1: P(Sechs) $\neq$ 1/6

b) $p(X \leqslant 1) = 0.130$; $p(X \leqslant 2) = 0.329$
$p(X \geqslant 6) = 1 - p(X \leqslant 5) = 0.102$; $p(X \geqslant 5) = 1 - p(X \leqslant 4) = 0.231$
==> **V = {0, 1, 6, 7, ..., 20}**

c) **H_0 verwerfen**

d) $\alpha_{li} = 0.026$; $\alpha_{re} = 0.037$ ==> $\alpha = \alpha_{li} + \alpha_{re} = \mathbf{0.063}$ ($\alpha = 2 \cdot \alpha_{re} = 0.074$)

e) β = p(H_0 wird angen. und p = 0.3) = p($X \in \{1, 2, .., 6\}$ und p = 0.3)
= **0.607** = (0.608)

65. X:p(3) = 3/5; p(4) = p(6) = 1/5 ;

E(X) = 19/5 = 3.8:

$E(X^2) = 79/5$; **V(X)** $= E(X^2) - (E(X))^2$ **= 1.36 = 34/25**

Y = 1 oder Y = 2

Z: p(3) = 2/5; p(6) = p(8) = p(12) = 1/5;

E(Z) = 32/5 = 6.4; $E(Z^2) = 262/5$; **V(Z) = 11.44 = 286/25**

66. $p(-100) = (5/6)^4 = 0.482$;

$p(100) = 500/6^4 = 0.386$;

$p(200) = 150/6^4 = 0.116$;

$p(300) = 20/6^4 = 0.0154$;

$p(400) = 1/6^4 = 0.000772$;

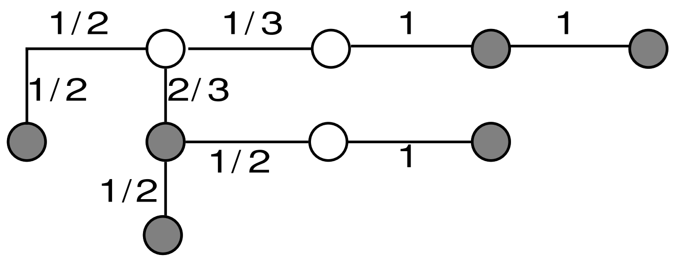
$E(X) = 100/6^4 \cdot [-625 \cdot 1 + 500 \cdot 1 + 150 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 1 \cdot 4] = 23900/1296 =$
18.44Fr.

$E(X^2) = 10^4/6^4 \cdot (1 \cdot (625+500) + 4 \cdot 150 + 9 \cdot 20 + 16 \cdot 1) = 14822.53$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 14482$, $\sigma = 120.34$

67. $E[x^2 - 2 \cdot X \cdot \mu + \mu^2] = E(X^2) - 2\mu \cdot E(X) + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$

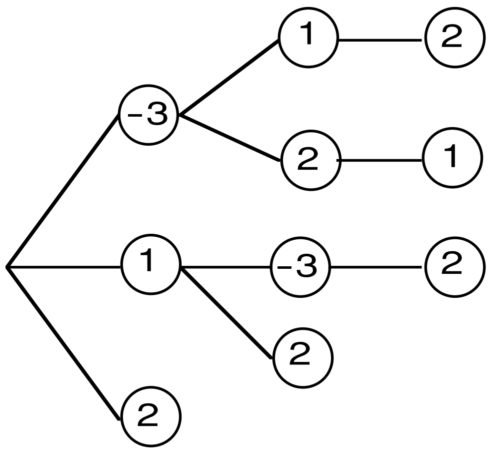
68.



E(Gewinn) = $1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot [1/3 \cdot 0 + 2/3 \cdot 0 + 2/3 \cdot 1/2 \cdot 1]$ = **2/3**

69.

$$\begin{aligned} E(X) &= 1/3 \cdot 1/2 \cdot 1 \cdot 0 \\ &+ 1/3 \cdot 1/2 \cdot 1 \cdot 0 \\ &+ 1/3 \cdot 1/2 \cdot 1 \cdot 0 \\ &+ 1/3 \cdot 1/2 \cdot 3 \\ &+ 1/3 \cdot 2 \\ &= \mathbf{7/6} \end{aligned}$$



70. $p(X = 1) = 1/6$; $p(X = 2) = 5/6^2$; $p(X = 3) = 5^2/6^3$;

$p(X = 4) = 5^3/6^4 + 5^4/6^4 = 750/6^4$

$E(X) = 1/216 \cdot (36 \cdot 1 + 30 \cdot 2 + 25 \cdot 3 + 125 \cdot 4) = 671/216 =$ **3.10648**

$V(x) = E(X^2) - E(X)^2$

$= 1/216 \cdot (36 \cdot 1^2 + 30 \cdot 2^2 + 25 \cdot 3^2 + 125 \cdot 4^2) - \mu^2 =$

$2381/216 - (671/21)^2 = 64055/216^2 =$ **1.3729**

71.

-12	-11	-10	-9	-8	-7	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2	2	2	1	2	2	1	2	1	2	4	4	3	2	3	2	1	==> 36
36	35	34	33	23	13	11	12	22	14	15	16	26	45	46	56	66	
63	53	43		32	31		21		41	51	61	62	54	64	65		
										24	25	44		55			
										42	52						

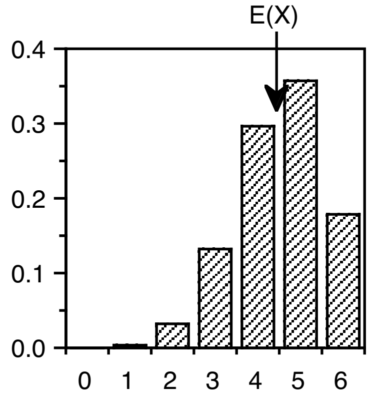
E(X) = 0 ==> Spiel ist fair

72. P(11) = 4/16,
P(121) = 2/16,
P(1221) = 1/165,
P(211) = 2/16,
P(2121) = 1/16
P(2211) = 1/16 => **P(A) = 11/16 = 0.6875**
P(1222) = 1/16
P(2122) = 1/16
P(2212) = 1/16
P(222) = 2/16 => P(B) = 5/16
b) P(2R) = 4/16, P(3R) = 6/16, P(4R) = 6/16
=> **E** = $2\cdot2/8 + (3+4)\cdot3/8$ = **25/8= 3.125**

73. p(0) = 4/12, P(1) = x/12, P(3) = (8−x)/12
E(X) = 1 = $x/12 + 3\cdot(8-x)/12$ => x = 6 => **6 mal 1 Fr., 2 mal 3 Fr.**

74.

p(0) = 0.0002
p(1) = 0.0044
p(2) = 0.0330
p(3) = 0.1318
p(4) = 0.2966
p(5) = 0.3560
p(6) = 0.1780



E(X) = $n\cdot p = 6\cdot3/4 = 9/2$ = **4.5**
V(X) = $n\cdot p\cdot(1-p) = 6\cdot3/4\cdot1/4 = 9/8$ = **1.125**

75. a)

$$b(x)\cdot\frac{n-x}{x+1}\cdot\frac{p}{p-1} = \frac{n!}{x!\cdot(n-x)!}\cdot p^{x}\cdot(1-p)^{n-x}\cdot\frac{n-x}{x+1}\cdot\frac{p}{1-p}$$

$$= \frac{n!}{(x+1)!(n-(x+1))!}\cdot p^{x+1}\cdot(1-p)^{n-(x+1)} = b(x+1)$$

b) gegeben: n = 17, p = 1/4, b(2). ==> $b(3) = b(2)\cdot15/3\cdot1/3$

76. a) 0.35 b) n = 10; p = 0.7 c) n bel.; p = 0.5
V(X) = ?
d) $E(X) = n\cdot p$ ==> p = 1/8 ==> $V(X) = 30\cdot1/8\cdot7/8 = 105/32 = 3.28$

77. a) Anzahl Lose sehr gross, so dass bei Ziehung von 50 Losen sich p nicht ändert.

b) Wir schliessen die Möglichkeit aus, der Verkäufer lüge zu seinen Ungunsten.

H_0: p = 0.25; H_1: p < 0.25   V = {0, 1, ..., 7, 8}

oder: Wir ziehen auch die erwähnte Möglichkeit in Betracht (zweiseitiger Test)

H_0: p = 0.25; H_1: p $\neq$ 0.25   V = {0, 1, ..., 7, 19, 20, ..., 50}

78. Es liegen keine weitere Informationen vor ==> 2-seitiger Test

H_0: p = 0.4, H_1: p $\neq$ 0.4

$P(X\leqslant 26) = 0.002$; $P(X\leqslant 27) = 0.005$; $P(X\geqslant 53) = 0.006$; $P(X\geqslant 54) = 0.003$

V = {0, ..., 27, 54, ..., 100}

79. Ausschreiben!

80. Es liegen keine weitere Informationen vor ==> 2-seitiger Test

H_0: p = 0.415, H_1: p $\neq$ 0.415 , $\alpha_{li} = \alpha_{re} = 0.025$

$P(X\leqslant 68) = 0.0179$; $P(X\leqslant 69) = 0.0255$; $P(X\geqslant 97) = 0.02689$; $P(X\geqslant 98) = 0.0192$

V = {0, ..., 68, 98, ..., 200}